CC n° 2

Mercredi 10 janvier 2018

Durée : 2 heures

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Soient A une partie de E et B une partie de F. On rappelle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

1. Montrer l'équivalence :

$$A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

2. En déduire que

$$A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B = \emptyset.$$

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on note

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 7}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}.$$

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x+2} = f(x) \tag{E}$$

1. a. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

b. En utilisant la méthode de variation de la constante, montrer que (E) admet une solution de la forme

$$y_1 : x \mapsto \frac{G(x)}{x+2},$$

où G est une primitive d'une fonction à expliciter.

c. Sans chercher à expliciter G, donner la forme générale des solutions de l'équation (E).

2. a. Montrer que le polynôme $P(X) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 4$ est divisible par $(X+2)^2$. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$A(X) = \frac{(X+2)(3X^2 + 2X + 7)}{P(X)}.$$

3. En déduire une expression explicite de la fonction G introduite à la question 1.
4. Donner l'ensemble des solutions y de (E) telles que $y(0) = 0$.

Exercice 4. Pour $x \in]0, \pi[$ on note

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que cela définit une fonction f dérivable de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.
2. a. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$.

b. Étudier la limite éventuelle de f en 0.

c. Pour $x \in [0, \pi[$ on note

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue en 0.
3. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et expliciter sa dérivée.
4. a. Soit g une fonction de $]0, \pi[$ dans $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 en π. En utilisant directement les définitions, montrer que

$$\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x \to \pi]{} +\infty.$$

b. Étudier la limite éventuelle de f en π.

c. Montrer que la fonction f ne se prolonge pas par continuité en π (autrement dit, il n'existe pas de fonction continue sur $]0, \pi]$ coïncidant avec f sur $]0, \pi[$).