CC n° 2

Mercredi 10 janvier 2018

Durée : 2 heures

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Correction : **[2pts pour l'énoncé, 2pts pour la démonstration]** Voir le cours.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Soient A une partie de E et B une partie de F. On rappelle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

1. Montrer l'équivalence :

$$A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

2. En déduire que

$$A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B = \emptyset.$$

Correction : **1. [2.5pts]** On suppose que $A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Soit alors $x \in A \cap f^{-1}(B)$. Comme $x \in A$ on a $f(x) \in f(A)$. En outre, $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$. Finalement $f(x) \in f(A) \cap B$, ce qui assure que $f(A) \cap B \neq \emptyset$. Ainsi on a montré l'implication

$$A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(A) \cap B \neq \emptyset. \tag{1}$$

Inversement, on suppose que $f(A) \cap B \neq \emptyset$ et on considère $y \in f(A) \cap B$. Comme $y \in f(A)$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. En outre $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. Cela prouve que x appartient à $f(A) \cap B$, qui n'est donc pas vide. Ainsi on a montré que

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset. \tag{2}$$

Finalement, avec (1) et (2) on obtient

$$A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

2. [1.5pt] On a montré (1). Par contraposée on a

$$f(A) \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap f^{-1}(B) = \emptyset.$$

De même la contraposée de (2) est

$$A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(A) \cap B = \emptyset.$$

Ces deux assertions prouvent que

$$A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \cap B = \emptyset.$$

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on note

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 7}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}.$$

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x+2} = f(x) \tag{E}$$

1. a. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

b. En utilisant la méthode de variation de la constante, montrer que (E) admet une solution de la forme

$$y_1 : x \mapsto \frac{G(x)}{x+2},$$

où G est une primitive d'une fonction à expliciter.

c. Sans chercher à expliciter G, donner la forme générale des solutions de l'équation (E).

2. a. Montrer que le polynôme $P(X) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 4$ est divisible par $(X+2)^2$. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$A(X) = \frac{(X+2)(3X^2 + 2X + 7)}{P(X)}.$$

3. En déduire une expression explicite de la fonction G introduite à la question 1.

4. Donner l'ensemble des solutions y de (E) telles que $y(0) = 0$.

Correction : **1.** a. **[1pt]** L'équation homogène associée à (E) est

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x+2} = 0. \tag{E_0}$$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & Ce^{-\ln(x+2)} = \frac{C}{x+2}, \end{cases} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

b. **[1pt]** On cherche une solution y_1 de la forme proposée, où G est une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour une telle fonction y_1 on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$y_1'(x) + \frac{y_1(x)}{x+2} = \frac{G'(x)}{x+2} - \frac{G(x)}{(x+2)^2} + \frac{G(x)}{(x+2)^2} = \frac{G'(x)}{x+2}.$$

Ainsi y_1 est solution de (E) si et seulement si $G'(x) = (x+2)f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c. **[1pt]** Une telle fonction G étant fixée, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{G(x) + C}{x+2}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

2. a. **[2pts]** Pour montrer que $(X-2)^2$ divise $P(X)$, il suffit de montrer que $P(-2) = P'(-2) = 0$. Mais pour la question suivante on a besoin du quotient de $P(X)$ par $(X-2)^2$. On effectue donc la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$. On obtient

$$P(X) = (X-2)^2(X^2+1).$$

Le reste étant nul, cela prouve en particulier que $(X-2)^2$ divise bien $P(X)$. Les polynômes $(X-2)$ (de dégré 1) et (X^2+1) (de degré 2 sans racine réelle) sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, donc cette écriture est en fait la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.

b. **[2pts]** D'après la question précédente on a

$$A(X) = \frac{3X^2 + 2X + 7}{(X+2)(X^2+1)}$$

On observe que le numérateur de cette fraction rationnelle est de degré strictement inférieur à son dénominateur. D'après le théorème de décomposition en élément simples, il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A(X) = \frac{a}{X+2} + \frac{bX + c}{X^2 + 1}.$$

En multipliant cette égalité par $(X+2)$ et en l'évaluant en -2 on obtient $a = 3$. On a alors

$$\frac{bX + c}{X^2 + 1} = \frac{3X^2 + 2X + 7}{(X+2)(X^2+1)} - \frac{3}{X+2} = \frac{2}{X^2+1}.$$

D'où $b = 0$ et $c = 2$. Finalement la décomposition en éléments simples de $A(X)$ est

$$A(X) = \frac{3}{X+2} + \frac{2}{X^2+1}.$$

3. [1pt] On a établi que la fonction G est telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$G'(x) = (x+2)f(x) = \frac{(x-2)(3x^2 + 2x + 7)}{P(x)} = A(x),$$

soit

$$G'(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x^2+1}.$$

Une solution possible est donc la fonction

$$G : x \mapsto 3\ln(x+2) + 2\arctan(x)$$

(on note que $x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$).

4. [1pt] On suppose que y est une solution de (E) telle que $y(0) = 0$. En particulier il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$y(x) = \frac{C + 3\ln(x+2) + 2\arctan(x)}{x+2}.$$

On doit avoir

$$0 = y(0) = \frac{C + 3\ln(2)}{2},$$

donc $C = -3\ln(2)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a nécessairement

$$y(x) = -\frac{3(\ln(x+2) - \ln(2)) + 2\arctan(x)}{x+2}.$$

Inversement cette fonction est bien solution, c'est donc l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$.

Exercice 4. Pour $x \in]0, \pi[$ on note

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que cela définit une fonction f dérivable de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.

2. a. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$.

b. Étudier la limite éventuelle de f en 0.

c. Pour $x \in [0,\pi[$ on note

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,\pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue en 0.

3. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et expliciter sa dérivée.

4. a. Soit g une fonction de $]0,\pi[$ dans $]0,+\infty[$ qui tend vers 0 en π. En utilisant directement les définitions, montrer que

$$\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to\pi]{} +\infty.$$

b. Étudier la limite éventuelle de f en π.

c. Montrer que la fonction f ne se prolonge pas par continuité en π (autrement dit, il n'existe pas de fonction continue sur $]0,\pi]$ coïncidant avec f sur $]0,\pi[$).

<u>Correction :</u>

1. [1pt] Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables et ne s'annulent pas sur $]0,\pi[$. Les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/\sin(x)$ sont donc bien définies et dérivables sur $]0,\pi[$. Par différence, la fonction f est bien définie et est dérivable sur $]0,\pi[$.

2. a. **[2pts]** On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

donc

$$\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

b. **[2pts]** On a

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\sin(x)}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = \frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

c. **[0.5pt]** Pour $x \in]0,\pi[$ on a

$$\tilde{f}(x) = f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = \tilde{f}(0),$$

donc $\tilde{f}$ est continue en 0.

3. [2pts] On reprend le calcul de la question 2.b et on obtient, pour $x \in]0,\pi[$,

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}.$$

Cela prouve que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de dérivée $\frac{1}{6}$.

4. a. **[1.5pt]** Soit $A > 0$. Comme g prend des valeurs strictement positives et tend vers 0 en π, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que

$$\forall x \in]\pi - \delta, \pi[, \quad 0 < g(x) \leqslant \frac{1}{A}.$$

Pour $x \in]\pi - \delta, \pi[$ on a alors

$$\frac{1}{g(x)} \geqslant A.$$

Cela prouve que

$$\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to\pi]{} +\infty.$$