CC n° 1

Lundi 13 novembre 2017 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **1.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k = 0$.

Exercice 2. Linéariser l'expression $\cos(\theta)^4$.

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On rappelle qu'on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

1. a. Exprimer avec les quantificateurs le fait que f ne tend pas vers ℓ en $+\infty$.
b. Exprimer avec les quantificateurs le fait que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
2. Définir avec les quantificateurs le fait que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. On suppose que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Soit g une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. En utilisant directement les définitions, montrer que

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

4. En donnant des exemples, montrer que le produit d'une fonction qui tend vers $+\infty$ et d'une fonction bornée peut, en $+\infty$, tendre vers une limite finie, vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite du tout (on ne demande pas de justification pour cette question).

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = z^2$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = -5 - 12i$.
2. a. Rappeler la définition d'une application injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
b. L'application f est-elle injective ?
c. Rappeler la définition d'une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
d. L'application f est-elle surjective ?
3. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On note

$$B = \{-a, a \in A\}.$$

On considère l'application $f_A : A \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f_A(z) = z^2$. Montrer que

$$f_A \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = \mathbb{C}.$$

4. (Question Bonus) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f_A soit bijective.