CC n° 1

Lundi 13 novembre 2017 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **1.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k = 0$.

Correction : **1.** On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{1} z^k = z^0 + z^1 = 1 + z,$$

et d'autre part

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^2-1}{z-1} = z+1.$$

D'où l'égalité pour $n = 1$. On suppose maintenant le résultat acquis jusqu'au rang n avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + z^{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + \frac{z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} = \frac{z^{n+2}-1}{z-1}.$$

D'où le résultat par récurrence.
2. Pour $z = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = n+1 \neq 0.$$

Donc 1 n'est pas solution. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 0 \iff \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 0 \iff z^{n+1} = 1.$$

Finalement, les solutions de l'équation $\sum_{k=0} z^k = 0$ sont les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité différentes de 1, soit

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in [\![1,n]\!] \right\}.$$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k.$$

On a alors

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} (-z)^k = f(-z).$$

Ainsi $g(z) = 0$ si et seulement si $f(-z) = 0$. L'ensemble des solutions de l'équation $g(z) = 0$ est donc

$$\left\{ -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in [\![1,n]\!] \right\}.$$

Commentaires : Pour la deuxième question, il fallait penser à traiter à part le cas $z = 1$. En effet, l'égalité de la première question n'est évidemment pas valable dans ce cas. C'est d'autant plus important de ne pas l'oublier qu'il est clair que 1 n'est pas solution alors que c'est une racine $(n+1)$-ième de l'unité.

Pour la troisième question sont apparues quelques horreurs comme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = 0 \text{ ou } \sum_{k=0}^{n} z^k = 0.$$

En cas de doute sur les sommes, revenez à la version étendue :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z^k = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n.$$

Exercice 2. Linéariser l'expression $\cos(\theta)^4$.

Correction : Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^4 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta)+8\cos(2\theta)+6\right)\\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On rappelle qu'on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

1. a. Exprimer avec les quantificateurs le fait que f ne tend pas vers ℓ en $+\infty$.
b. Exprimer avec les quantificateurs le fait que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
2. Définir avec les quantificateurs le fait que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. On suppose que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Soit g une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. En utilisant directement les définitions, montrer que

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

4. En donnant des exemples, montrer que le produit d'une fonction qui tend vers $+\infty$ et d'une fonction bornée peut, en $+\infty$, tendre vers une limite finie, vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite du tout (on ne demande pas de justification pour cette question).

Correction : **1.** a.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad \big(x \geqslant A \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

b.

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad \big(x \geqslant A \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

2. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant A \quad \implies f(x) \geqslant B.$$

3. Comme g est bornée, il existe $M \geqslant 0$ tel que $|g(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $g(x) \geqslant -M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $B \in \mathbb{R}$. Comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on a

$$f(x) \geqslant B + M.$$

Pour tout $x \geqslant A$ on a alors

$$f(x) + g(x) \geqslant (B + M) - M = B.$$

Cela prouve que $f + g$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Pour $\ell \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}(1+x^2) \times \frac{\ell}{1+x^2} &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell,\\ x \times 1 &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,\\ x \times (-1) &\xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,\end{aligned}$$

et la fonction

$$x \mapsto x \times \sin(x)$$

n'admet pas de limite (ni finie ni infinie) en $+\infty$.

Commentaires : Pour la question 1.a, attention à la négation d'une implication. La négation de $P \implies Q$ est (P et (non Q)) (en particulier il n'y a pas d'implication dans la négation d'une implication. On pouvait aussi simplement répondre

$$\exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \geqslant A, \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Pour la question 1.b, on retrouve souvent une constante ℓ qui n'est pas introduite, alors qu'il n'y a aucune variable ℓ dans la question.

Pour la question 3, vous partez quasiment tous sur le fait que g admet une limite finie. Alors même qu'à la question suivante vous utilisez le sinus ou le cosinus comme exemple de fonction bornée qui n'admet pas de limite...

En outre, évitez les calculs impliquant l'infini !

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = z^2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = -5 - 12i$.

2. a. Rappeler la définition d'une application injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

b. L'application f est-elle injective ?

c. Rappeler la définition d'une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

d. L'application f est-elle surjective ?

3. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On note

$$B = \{-a, a \in A\}.$$

On considère l'application $f_A : A \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f_A(z) = z^2$. Montrer que

$$f_A \text{ est surjective} \quad \iff \quad A \cup B = \mathbb{C}.$$

4. (Question Bonus) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f_A soit bijective.

Correction : **1.** Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$z^2 = -5 - 12i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $z^2 = -5 - 12i$ sont donc $(2 - 3i)$ et $(-2 + 3i)$.

2. a. Une application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite injective si

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad g(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2.$$

b. L'application f n'est pas injective car 1 et -1 sont distincts mais ont la même image 1 par f.

c. Une application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite surjective si

$$\forall w \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = w.$$

d. L'application f est bien surjective car tout complexe admet une (s'il est nul) ou deux (s'il est non nul) racines carrées dans $\mathbb{C}$.

3. On suppose que f_A est surjective. Montrons que $A \cup B = \mathbb{C}$. Comme A et B sont des parties de $\mathbb{C}$, on a bien $A \cup B \subset \mathbb{C}$. Soit $w \in \mathbb{C}$. Comme f_A est surjective, il existe $z \in A$ tel que $z^2 = f_A(z) = w^2$. Comme les deux solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$ sont w et $-w$, on a nécessairement $w = z \in A$ ou $-w = z \in A$ (auquel cas, w appartient à B). Dans tous les cas, on a $w \in A \cup B$. Cela prouve que $\mathbb{C} \subset A \cup B$. D'où, finalement, $A \cup B = \mathbb{C}$.

Inversement, on suppose que $A \cup B = \mathbb{C}$. Soit $w \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine carrée de w dans $\mathbb{C}$. Si $z \in A$ alors $f_A(z) = w$. Sinon, on a forcément $z \in B$. Dans ce cas $-z \in A$ et on a $f_A(-z) = (-z)^2 = w$. Dans tous les cas, il existe un élément de A dont l'image par f_A est w. Cela prouve que f_A est surjective.

4. Montrons que

$$f_A \text{ est injective} \quad \iff \quad A \cap B \subset \{0\}.$$

On suppose que f_A est injective. Soit $z \in A \cap B$. On a $z \in A$ et $-z \in A$. Or $f_A(z) = f_A(-z)$ donc $z = -z$ cela implique que $z = 0$. Ainsi, $A \cap B \subset \{0\}$.

Inversement, on suppose que $A \cap B \subset \{0\}$. Soit $(z_1, z_2) \in A^2$ tel que $f_A(z_1) = f_A(z_2)$, soit $z_1^2 = z_2^2$. On suppose par l'absurde que $z_1 \neq z_2$. On a alors $z_2 = -z_1$, et donc $z_1 \in B$. D'où $z_1 \in A \cap B \subset \{0\}$. Ainsi on a $z_1 = z_2 = 0$, ce qui est absurde. Cela prouve que $z_1 = z_2$, et donc que f est injective.

Finalement on a

$$f_A \text{ est bijective} \iff f_A \text{ est injective et surjective} \iff \Big(A \cup B = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad A \cap B \subset \{0\} \Big).$$