TD n° 8 : Transformée de Fourier

***Exercice* 8.1** (Transformée de Fourier L^1)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
1. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto e^{-ix\xi} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et son intégrale ne dépend pas du choix d'un représentant de f). On note alors

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

$\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.
2. Montrer que $\hat{f}$ est bornée.
3. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la fonction $\hat{f}$ ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est continue.
5. a. En effectuant une intégration par parties, montrer que si f est de classe C^1 et à support compact, alors $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend $+\infty$.
b. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend $+\infty$ dans le cas général $f \in L^1(\mathbb{R})$.
6. Montrer que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.

***Exercice* 8.2. 1.** Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$.
2. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par transformée de Fourier.

***Exercice* 8.3** (Inversion de Fourier dans L^1)**.** Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|t|} e^{itx}\, dt.$$

1. Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$h_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Indication : pour la première égalité on pourra utiliser la parité des parties réelles et imaginaires, puis effectuer des intégrations par parties.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f * h_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|\xi|} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

3. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ continue en 0 (cela signifie que g admet un représentant continu en 0). En utilisant l'expression de h_ε obtenue à la question 1, montrer que $(g * h_\varepsilon)(0)$ tend vers $\sqrt{2\pi}g(0)$ quand ε tend vers 0. *Indication : on pourra utiliser la question 1.*
4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\| f * h_\varepsilon - \sqrt{2\pi} f \right\|_1$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. *Indication : on pourra utiliser la question précédente avec $g : y \mapsto \|\tau_y f - f\|_1$.*
5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{$*$}$$

***Exercice* 8.4** (Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz, régularité et décroissance)**.** On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à décroissance rapide si elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ est bornée. On appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à décroissance rapide.
1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et la dérivée de $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto -ixf(x)$.
3. Montrer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la formule d'inversion $(*)$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

***Exercice* 8.5** (Transformée de Fourier dans L^2). Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on note

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

1. Montrer que cela définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est que la norme associée est $\|\cdot\|_2$.
2. Montrer que pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$. En déduire que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
3. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. Soit $f \in L^2$. Montrer qu'il existe $g \in L^2$ tel que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}_n$ tend vers g dans L^2.
5. Montrer qu'il existe une unique application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Si $f \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.
(ii) $\mathcal{F}$ est linéaire.
(iii) $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.
(iv) Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$ est la fonction $x \mapsto f(-x)$.
(v) $\mathcal{F}$ est une bijection de $L^2(\mathbb{R})$.

N.B. En général ($*$) n'a pas de sens dans L^2 !

***Exercice* 8.6** (Transformée de Fourier d'une gaussienne). **1.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
b. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\hat{f}'(\xi) + \xi\hat{f}(\xi) = 0$.
c. Calculer $\hat{f}(0)$.
d. Calculer $\hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Soit $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$.

***Exercice* 8.7** (Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$). Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x), & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$**$}$$

1. Pour cette question on travaille au niveau formel (c'est-à-dire sans se préoccuper des questions de rigueur). On suppose que u est solution de ($**$). Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t,x)\,dx.$$

a. Montrer que pour $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\partial_t \hat{u}(t,\xi) = \xi^2 \hat{u}(t,\xi)$.
b. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t\xi^2}\hat{u}_0(\xi)$.
c. Soit $t > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy. \tag{$***$}$$

2. Inversement, on considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ la fonction u définie par ($***$).
a. Montrer que $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$ et $\|u(t) - u_0\|_{L^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.
b. Montrer que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que $\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.