TD n° 4 : Intégration

***Exercice* 4.1.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On considère sur E la tribu

$$\mathcal{M}_E = \{A \cap E, A \in \mathcal{M}\} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \subset E\}.$$

Pour $B \in \mathcal{M}_E$ on note $\mu_E(B) = \mu(B)$.
1. Vérifier que μ_E est une mesure sur $(E, \mathcal{M}_E)$.
2. Soit f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que la restriction $f_{|E}$ de f à E est intégrable et

$$\int_E f_{|E}\, d\mu_E = \int_X \mathbb{1}_E f\, d\mu.$$

***Exercice* 4.2.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable. Pour $A \in \mathcal{M}$ on note

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A\, d\mu.$$

1. Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ absolument continue par rapport à μ (si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$).
2. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que g est intégrable par rapport à ν si et seulement si fg est intégrable par rapport à μ, et que dans ce cas

$$\int_X g\, d\nu = \int_X fg\, d\mu.$$

***Exercice* 4.3.** On munit $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\int_{[0,1]} f\, d\lambda = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

où l'intégrale de droite est l'intégrale au sens de Riemann.

***Exercice* 4.4.** Soit f une fonction continue de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+$ et F une primitive de f.
1. Montrer que F admet une limite $\ell_0 \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ en 0 et une limite $\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1.
2. Montrer que

$$\int_{]0,1[} f\, d\lambda = \ell_1 - \ell_0.$$

***Exercice* 4.5.** On munit $[-1, 1]$ de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ si n est pair et $f_n = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ si n est impair.
1. Vérifier que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\lambda \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n\, d\lambda.$$

***Exercice* 4.6.** Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. On note $\mu = \mu_1 + \mu_2$.
1. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.
2. Soit f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est intégrable pour la mesure μ si et seulement si elle l'est pour les mesures μ_1 et μ_2, et que dans ce cas on a

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 + \int_X f\, d\mu_2.$$

***Exercice* 4.7.** On munit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de δ_0, la mesure de Dirac en 0. Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$.

***Exercice* 4.8.** Soit f une fonction borélienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{[0,1]} e^{nx} f \, d\lambda \leqslant M.$$

1. Montrer que $f = 0$ p.p.
2. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f = 0$.

***Exercice* 4.9.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\} \big) \leqslant \frac{1}{a} \int_X |f| \, d\mu.$$

2. Montrer que

$$a\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant a\} \big) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0.$$

***Exercice* 4.10.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(A) \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \int_A |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

***Exercice* 4.11.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(t^n) \, dt.$$

***Exercice* 4.12.** Étudier la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n dx.$$

***Exercice* 4.13.** Étudier la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)^n \, dx.$$

***Exercice* 4.14.** Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on pose

$$f(t,x) = \cosh\left(\frac{1}{1+x}\right) - 1.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $f(t, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On note alors

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, \cdot) \, d\lambda = \int_0^{+\infty} f(t,x) \, dx.$$

2. Montrer que la fonction F et continue et dérivable, et donner une expression de F'.