TD n° 2 : Mesures

***Exercice* 2.1.** Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m ainsi définie est-elle une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

***Exercice* 2.2.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Montrer que l'application

$$m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

***Exercice* 2.3.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit Y un ensemble et f une application de X dans Y. On note $\mathcal{N}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par f comme à l'exercice 1.4. Pour $B \in \mathcal{N}$ on note $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Montrer que cela définit une mesure ν sur l'espace mesurable $(Y, \mathcal{N})$. *ν est appelée mesure image de μ par f.*

***Exercice* 2.4.** On considère une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $\mathcal{O}$ l'union de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ de mesure nulle. Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de mesure nulle. En déduire qu'il existe un plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) de mesure nulle.

***Exercice* 2.5.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ et tel que

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \varepsilon.$$

***Exercice* 2.6.** Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$, finie sur les compacts. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]x_0, x]) & \text{si } x > x_0, \\ -\mu(]x, x_0]) & \text{si } x \leqslant x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite en tout point.
2. Montrer que F est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
3. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est dénombrable.

***Exercice* 2.7.** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables. On note B l'ensemble des $x \in X$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité d'indices n.
1. Montrer que B est mesurable.
2. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge. Montrer que $\mu(B) = 0$.

***Exercice* 2.8.** **1.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le graphe de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue).
2. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ (toujours muni de la mesure de Lebesgue). Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue ?