CC n° 2 - 19 avril 2017

Durée : 1h30

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. Dans tout le sujet on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Cours. Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 1. Étudier la limite éventuelle

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)^n\, dt.$$

On commencera par justifier l'existence de chacune de ces intégrales.

Exercice 2. Soit $R > 0$. On note $D(R) \subset \mathbb{R}^2$ le disque centré en 0 de rayon R. Calculer

$$\int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda_2(x,y).$$

Exercice 3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, d\lambda(x).$$

1. Justifier que cette définition a bien un sens.
2. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y).$$

On rappelle que cette définition a bien un sens et que le produit de convolution $(f * g)$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Exercice 4. Dans cet exercice on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $p \in]1, +\infty[$. On note $(L^p)^*$ l'espace des formes linéaires continues sur L^p, muni de la norme usuelle, définie pour $\varphi \in (L^p)^*$ par

$$|||\varphi|||_p = \sup_{\substack{f \in L^p \\ \|f\|_p \neq 0}} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_p}.$$

On note q l'exposant conjugué de p et on considère $g \in \mathcal{L}^q$.
1. Montrer que l'application $\varphi_g : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda$ est une forme linéaire sur L^p et que $|||\varphi_g|||_p \leqslant \|g\|_q$.
2. Montrer que $|||\varphi_g|||_p \geqslant \|g\|_q$. Pour cela on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto |g(x)|^{q-1}\operatorname{sign}(g(x))$, où pour $t \in \mathbb{R}$ on a noté

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$