TD n° 1 :
Langage mathématique

***Exercice* 1.1.** On note $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,5\}$. Décrire $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \times B$.

***Exercice* 1.2.** Soient E et F deux ensembles. Soit f une application injective de E dans F. On note G l'image $f(E)$ de f et considère l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \right.$$

Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective.

***Exercice* 1.3.** Soient E, F et G trois ensembles. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.
1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

***Exercice* 1.4.** Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
1. Montrer que si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$ alors $B \subset C$.
2. Montrer l'implication

$$(A \cup B) \not\subset C \quad \Longrightarrow \quad \big(A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C\big).$$

***Exercice* 1.5.** **1.** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Combien d'éléments a $\mathcal{P}(E)$?
2. Soient E et F deux ensembles finis. Donner le cardinal de l'ensemble des injections de E dans F. Même question pour les bijections.

***Exercice* 1.6.** Décrire simplement les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[.$$

***Exercice* 1.7.** Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies, fausses ou ne sont pas des assertions correctes. Dans les deux premiers cas, justifier.

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$
(ii) $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists \varepsilon^2 \in]0,1[, \quad 0 < \varepsilon^2 < \varepsilon.$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$
(iv) $\exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad 0 < \eta < \varepsilon.$
(v) $\varepsilon < 0.$
(vi) $\forall \varepsilon > 0, \forall R > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon > 2R.$

***Exercice* 1.8.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles peut-on déduire de cette information ? Justifier !

(i) $\forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)| \leqslant \delta.$
(ii) $\forall \varepsilon > 1, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| < \varepsilon.$

(v) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
(vi) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$.
(vii) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$.
(viii) $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| > \varepsilon$.

***Exercice* 1.9.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(i) La fonction f s'annule.
(ii) La fonction f est la fonction nulle.
(iii) La fonction f n'est pas constante.
(iv) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
(v) La fonction f n'est pas surjective.
(vi) La fonction f admet un minimum.
(vii) La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
(viii) La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

***Exercice* 1.10.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

(i) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) = c$.
(ii) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \implies x = 0$.
(iii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y$.
(iv) $\forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
(v) $\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$.
(vi) $\forall x, y \in I, \quad x = y \implies f(x) = f(y)$.

***Exercice* 1.11.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les négations des assertions suivantes :

(i) $\forall x \in I, \quad f(x) = 0$.
(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \quad f(x) = y$.
(iii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M$.
(iv) $\forall x \in I, \forall y \in I, \quad f(x) \leqslant f(y) \implies x \leqslant y$.
(v) $\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \implies x \leqslant 0$.

***Exercice* 1.12.** Déterminer l'ensemble des réels a tels que

(i) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon$.
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon$.
(iv) $\forall \varepsilon \geqslant 0, \quad |a| < \varepsilon$.

***Exercice* 1.13.** Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le produit de n entiers impairs et impair.

***Exercice* 1.14.** Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

***Exercice* 1.15.** Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $2^n \leqslant n!$?

***Exercice* 1.16.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ on note

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$