UNIVERSITÉ TOULOUSE 3 — DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ANNÉE 2016-2017 — L1 PARCOURS SPÉCIAL

Mathématiques

Contrôle Continu n°1 - jeudi 10 novembre 2016

Durée : 1h30

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad \big(B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C\big).$$

Correction : On suppose que $A \cup B = A \cap B$. Soit $x \in B$. On a $x \in A \cup B = A \cap C$, donc en particulier $x \in A$. Cela prouve que $B \subset A$. Soit maintenant $x \in A$. Alors on a de nouveau $x \in A \cup B = A \cap C$, et en particulier $x \in C$. Cela prouve que $A \subset C$. Ainsi on a prouvé

$$A \cup B = A \cap C \quad \Rightarrow \quad \big(B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C\big). \tag{1}$$

Inversement on suppose que $B \subset A$ et $A \subset C$. Comme $B \subset A$ on a $A \cup B = A$. Et comme $A \subset C$ on a $A \cap C = A$. Ainsi on a $A \cup B = A = A \cap C$. Cela prouve que

$$\big(B \subset A \quad \text{et} \quad A \subset C\big) \quad \Rightarrow \quad A \cup B = A \cap C. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) on a bien l'équivalence demandée.

Commentaires :

- Les égalités du genre
$$A \cap C = A + C - A \cup B$$
n'ont aucun sens. Pourquoi des raisonnements avec de telles additions entre ensembles sont-ils si souvent apparus ? ?
- Beaucoup d'erreurs de raisonnement. En cas de doute esssayer de vous contenter des fondamentaux, pour montrer une équivalence on montre deux implications, pour montrer une implication on suppose l'hypothèse vraie (et on le dit) et on montre la conclusion, pour montrer une égalité entre deux ensembles on peut montrer les deux inclusions, pour montrer une inclusion entre deux ensembles on considère un élément du premier et et on montre qu'il appartient au second, etc.
- Lorsqu'on montre l'égalité $A \cup B = A \cap C$ par double inclusion, on peut remarquer que l'inclusion $A \cap C \subset A \cup B$ est toujours vraie. Les hypothèses $B \subset A$ et $A \subset C$ ne sont utiles que pour montrer que $A \cup B \subset A \cap B$.

Exercice 2. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (2-i)Z - 2i = 0$. On donnera les solutions sous formes algébriques et polaires.
2. Soit $n \geqslant 2$. En déduire sous forme polaire les solutions de l'équation $z^{2n} + (2-i)z^n - 2i = 0$.
3. Lorsque $n = 2$, placer les solutions dans le plan complexe et les écrire sous forme cartésienne.

Correction : **1.** Le discriminant de l'équation est $\Delta = (2-i)^2 + 8i = 3 + 4i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine de Δ, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 3, \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = 4, \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 5, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$x^2 = 4, \quad y^2 = 1 \quad \text{et} \quad xy > 0.$$

On obtient que les racines de Δ sont $2+i$ et $-2-i$. Les solutions de l'équations sont alors

$$Z_1 = \frac{-(2-i)+(2+i)}{2} = i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-(2-i)-(2+i)}{2} = -2.$$

Sous forme polaire ces solutions s'écrivent

$$Z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2e^{i\pi}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $z^{2n} + (2-i)z^n - 2i = 0$. On note $Z = z^n$. Alors on a $Z^2 + (2-i)Z - 2i = 0$. Donc $Z = i$ ou $Z = -2$. Si $z^n = i$ alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

De même, si $z^n = -2$ il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$z = 2^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Inversement, si z est de l'une des deux formes précédentes, alors on a bien $z^{2n} + (2-i)z^n - 2i = 0$.
Ainsi les solutions sont les complexes de la forme $e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ ou $e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
3. Pour $n = 2$, les solutions de $z^4 + (2-i)z^2 - 2i$ sont donc

$$e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad e^{\frac{5i\pi}{4}}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{2}}.$$

Sous forme cartésienne, ces racines s'écrivent

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Commentaires :

- Dans cet exercice il fallait faire particulièrement attention, car les erreurs se répercutaient sur la suite de l'exercice. Malheureusement, il y a eu beaucoup d'erreurs dès la premières questions, à toutes les étapes : calcul du discriminant (!), de ses racines, écritures du type $\sqrt{\Delta}$ ou même $\Delta > 0$ alors que Δ n'est pas réel, etc.
- Quand vous obtenez des solutions pour lesquels les calculs suivants deviennent impossibles, dans le contexte d'un examen sans calculatrice, cela vaut le coup de vérifier les calculs précédents pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur. Quand vous obtenez une solution simple (par exemple 0), il n'est pas très dur de vérifier a poteriori si c'est effectivement une solution.
- On rappelle que pour $Z \neq 0$ l'équation $z^n = Z$ admet exactement n solutions. Et comme pour les racines carrées, il n'y a pas de fonction racine n-ième sur $\mathbb{C}$ ...

Exercice 3. 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler la définition (avec les quantificateurs) de

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

2. En n'utilisant que cette définition et la définition de la continuité, montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue en 0.

Correction : **1.**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \delta \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On note $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant \delta$ on a

$$|f(x)| = |x|^2 \leqslant \delta^2 = \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Comme $f(0) = 0$, cela signifie que f est continue en 0.

Exercice 4. 1. Soient f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à f en $+\infty$ si

$$f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que, dans ce cas,

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a.$$

2. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1\right).$$

a. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

b. En déduire que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

c. Montrer que pour tout $y_0 \geqslant 1$ il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Correction : **1.** Pour $x \geqslant 0$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x}.$$

Le premier et le troisième termes tendent vers 0 en $+\infty$, par hypothèse et parce que le dénominateur x tend vers $+\infty$. Ainsi on a bien

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a.$$

2. a. Pour $x \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x}\ln\left(e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x}\right)\right) = \frac{\ln(e^x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x}\right)\\ &= x + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc par continuité du logarithme

$$\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\ln(2).$$

On en déduit qu'on a bien

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

b. D'après ce qui précède on a

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} + e^{-x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\ln(2).$$

On en déduit que

$$f(x) - x + \ln(2) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que f admet comme asymptote la droite d'équation $y = x - \ln(2)$.

c. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1$ est continue. Comme la fonction ln est continue, on obtient que f est continue comme composée de fonctions continues.

Soit $y_0 \geqslant 1$. D'après ce qui précède, on a

$$f(x) = \big(f(x) - x + \ln(2)\big) + x - \ln(2) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

En particulier, il existe $B \geqslant 0$ tel que $f(B) \geqslant y_0$. D'autre part on a $f(0) = \ln(2) < 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0, B] \subset [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Commentaires :

- Pour la question 1 : beaucoup d'écritures du type

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} ax + b.$$

Cela ne veut rien dire...

- D'autre part, ce n'est pas parce que $f(x)$ et $g(x)$ ont même limite que c'est aussi le cas pour $\frac{f(x)}{x}$ et $\frac{g(x)}{x}$.
- Pour la question 2.a : La quotient $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ n'est pas égal à $\cos(x)$ en général. Après cette erreur, il est inquiétant de voir que la fonction $f(x)/x$ tend quand même vers 1.
- Toujours pour 2.a : Attention aux propriétés de la fonction ln.
- Pour la question 2.b : ce n'est pas parce que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ qu'on a forcément une asymptote d'équation $y = x$. D'ailleurs on n'a même pas forcément d'asymptote du tout ! Considérer par exemple la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$.