QUELQUES CORRECTIONS

Table des matières

1 TD2

Exercice 2.14.4.

On suppose que $z \in \mathbb{C}$ est solution de

$$(z+i)^n = (z-i)^n. \tag{$*$}$$

On a nécessairement $z \neq i$. On peut donc écrire

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = \frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1.$$

Ainsi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Puisque $z+i \neq z-i$, on a en fait $k \in [\![1, n-1]\!]$. Notant $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ on a alors

$$z + i = \omega z - i\omega,$$

soit

$$z(1-\omega) = -i(1+\omega),$$

puis

$$z = i\frac{\omega+1}{\omega-1}.$$

Inversement, si z est de cette forme on a bien $z \neq 1$ et

$$\frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = \omega^n = 1,$$

donc z est solution de $(*)$. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{ i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}, k \in [\![1, n-1]\!] \right\}.$$

On considère une solution z de $(*)$. D'après ce qui précède il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $z = (\omega+1)/(\omega-1)$, où $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On a alors

$$\bar{z} = -i\frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}-1} = -i\frac{\frac{1}{\omega}+1}{\frac{1}{\omega}-1} = -i\frac{1+\omega}{1-\omega} = i\frac{\omega+1}{\omega-1} = z.$$

Cela prouve que z est réel. Ainsi toutes les solutions de $(*)$ sont réelles.

Remarque : En fait on peut montrer ce dernier point sans même avoir explicité les solutions. En effet, si $z \in \mathbb{C}$ est solution de $(*)$ on a $|z-i|^n = |z+i|^n$ et donc $|z-i| = |z+i|$. Cela n'est possible que si z est réel (on peut le vérifier par calcul direct ou bien en pensant à l'interprétation du module en termes de distances).

2 Interro 1

Énoncé

Soient E et F deux ensembles. Soit f une fonction de E dans F. Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Montrer que

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Correction

Soit $x \in E$. On suppose que $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Cela signifie que $f(x) \in B_1 \cap B_2$. En particulier on a $f(x) \in B_1$, donc $x \in f^{-1}(B_1)$, et d'autre part $f(x) \in B_2$, donc $x \in f^{-1}(B_2)$. D'où $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Ainsi on a

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \tag{1}$$

Inversement, supposons que $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. On a $f(x) \in B_1$ et $f(x) \in B_2$, donc $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Cela signifie que $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Ainsi,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2). \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on a bien

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

N.B. : Ici le raisonnement aurait été suffisament simple pour procéder par équivalence. Mais, pour prendre de bonnes habitudes en vue de questions plus subtiles, la correction proposée procède plutôt par double inclusion.

3 Interro 2

Énoncé

Soit E un ensemble. Soient f et g deux fonctions de E dans E. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Correction

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant g on obtient $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme $(g \circ f)$ est injective, cela implique que $x_1 = x_2$. D'où f est injective.

Énoncé

Soit E un ensemble. Soient f et g deux fonctions de E dans E. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Correction

Soit $y \in E$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $z \in E$ tel que $y = g(f(z))$. Notant $x = f(z)$ on obtient que $y = g(x)$. Cela prouve que g est surjective.

4 Interro 3

Énoncé

On note $Z = 3 - 5i$. Calculer la somme de toutes les racines 5-ièmes de Z.

Correction

On rappelle que le résultat est connu si $Z=1$. Soit z_0 une racine 5-ième de Z. L'ensemble des racines 5-ièmes de Z est alors

$$\left\{z_0 e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in [\![0,4]\!]\right\}.$$

Ainsi la somme des racines 5-ièmes de z est

$$\sum_{k=0}^{4} z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} = z_0 \sum_{k=0}^{4} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0,$$

car la somme des racines 5-ièmes de l'unité est nulle.

Remarque : Étant donné un argument Θ de Z on pouvait également écrire que l'ensemble de ses racines 5-ièmes est

$$\left\{\sqrt{|Z|}^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2ik\pi+i\Theta}{5}}, k \in [\![0,4]\!]\right\},$$

puis conclure de la même façon.

Remarque : Le raisonnement est valable pour tout $Z \in \mathbb{C}^*$. La valeur concrète donnée dans l'énoncé ne joue aucun rôle ici.

5 F.A.Q.

5.1 Monotonie et Continuité

5.1.1 Rappel de la définition d'une fonction croissante.

Définition. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que f est croissante si pour tout $(x_1, x_2) \in D^2$ on a

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

On note en particulier que D n'a pas besoin d'être un intervalle et qu'il n'y a aucune hypothèse de régularité (continuité, dérivabilité, etc.) sur f. Par exemple la fonction *partie entière* est croissante sur $\mathbb{R}$.

5.1.2 La fonction inverse est-elle décroissante ?

La fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

est dérivable sur son domaine de définition de dérivée partout strictement négative, et pourtant elle n'est pas décroissante. En effet on a $-2 \leqslant 2$ et pourtant $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$.

Attention, comme on a dit, les implications

$$f' = 0 \implies f \text{ constante}, f' \geqslant 0 \implies f \text{ croissante}, f' \leqslant 0 \implies f \text{ décroissante}$$

ne sont valables que sur un *intervalle* (et pour une fonction f *dérivable*, bien entendu).