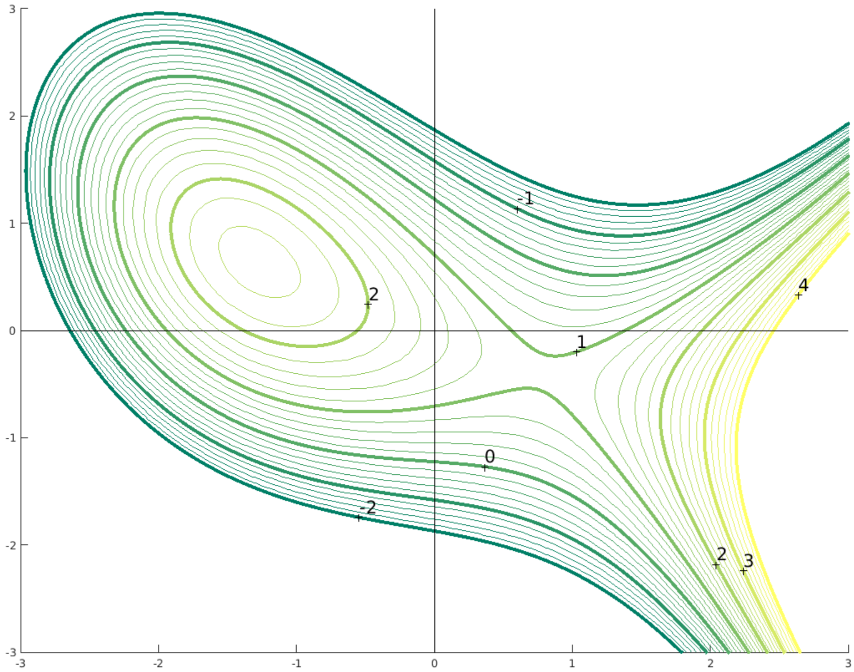
Calcul Différentiel et Intégral

Examen partiel - lundi 02 novembre 2015

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère une fonction f de $[-3,3]\times[-3,3]$ dans $\mathbb{R}$ dont les lignes de niveaux entre -2 (ligne foncée) et 4 (ligne claire) sont données par la figure ci-après. Dessiner l'allure des graphes (en précisant les coordonnées approximatives des points particuliers) des fonctions $\varphi : t \mapsto f(t,0)$ et $\psi : t \mapsto f(t,t)$.



$\rightsquigarrow$ Il s'agit de la fonction

$$(x,y) \mapsto \frac{x^3}{3} - xy - y^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on avait

$$\varphi(t) = \frac{t^3}{3} - t + \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - t + \frac{3}{2}.$$

$\square$

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \big(x^3y^2, x\cos(xy)\big) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et préciser sa différentielle.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(t) = f(t^2, e^t)$. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée en tout point.

$\rightsquigarrow$ **1.** La fonction $(x,y) \mapsto x^3y^2$ est polynômiale donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. C'est également le cas de la fonction $(x,y) \mapsto xy$. Puisque la fonction cosinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition que $(x,y) \mapsto \cos(xy)$ est différentiable, puis par multiplication avec une fonction différentiable on obtient que $(x,y) \mapsto x\cos(xy)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Finalement f est bien différentiable sur $\mathbb{R}^2$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(3x^2y^2, \cos(xy) - xy\sin(xy)\big)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(2x^3y, -x^2\sin(xy)\big).$$

Ainsi la différentielle de f au point (x,y) est l'application

$$(h_1,h_2) \mapsto h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(3h_1x^2y^2 + 2h_2x^3y, h_1\cos(xy) - h_1xy\sin(xy) - h_2x^2\sin(xy)\big).$$

2. La fonction $t \mapsto (t^2, e^t)$ est dérivable, donc par composition φ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,e^t) + e^t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,e^t) = \big(6t^5e^{2t} + 2t^6e^{2t}, 2t\cos(t^2e^t) - 2t^3e^t\sin(t^2e^t) - t^4e^t\sin(t^2e^t)\big).$$

$\square$

Exercice 3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point, et les expliciter.
3. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est différentiable.

$\rightsquigarrow$ **1.** La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = \frac{r^3\cos(\theta)^2\,|\sin(\theta)|}{r^2} \leqslant r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f tend vers 0 = f(0,0) quand (x,y) tend vers (0,0), et donc que f est continue en (0,0). Finalement f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On a vu que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a en outre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{0} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

donc f admet une dérivée partielle en x au point (0,0) qui vaut 0. De même, f admet une dérivée en y au point (0,0) qui vaut 0.
3. On a vu que f est de classe C^∞ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Supposons par l'absurde que f est différentiable en (0,0). Puisque les dérivées partielles de f sont nulles en (0,0), la différentielle est nécessairement nulle. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(t) = f(t,t)$. Par composition la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle en 0. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(t) = \frac{t}{2}$, donc $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$. D'où la contradiction. D'où f n'est pas différentiable en (0,0). Ainsi le plus grand ouvert sur lequel f est différentiable est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\,\|x-y\|\,.$$

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|d_x f(h)\| \geqslant k\,\|h\|\,.$$

2. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^n$ par f est un ouvert.
3. Montrer que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

⇝ **1.** Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{\|f(x+th)-f(x)\|}{|t|} \geqslant \frac{k\,\|th\|}{|t|} = k\,\|h\|\,.$$

D'autre part on a

$$\frac{\|f(x+th)-f(x)\|}{|t|} = \left\| \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \right\| \xrightarrow[t\to 0]{} \|d_x f(h)\|\,.$$

D'où $\|d_x f(h)\| \geqslant k\,\|h\|$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, l'application linéaire $d_x f$ est injective (si $d_x f(h) = 0$ alors $h = 0$) donc inversible. D'après le théorème de l'inversion locale, il existe une voisinage $\mathcal{U}$ de x et un voisinage de $\mathcal{V}$ de $f(x)$ tel que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. En particulier $\mathcal{V}$ est inclus dans l'image de f. Cela prouve que l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(y)$. Par hypothèse on a

$$\|x-y\| \leqslant \frac{\|f(x)-f(y)\|}{k} = 0,$$

donc $x = y$. Cela prouve que f est injective. Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur son image. Par le théorème de l'inversion globale, f réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur son image. □

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ standard. On note $\overline{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, B la boule ouverte et S la sphère correspondantes. On considère une fonction f continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ et différentiable sur B. On rappelle qu'une telle fonction est bornée et atteint ses bornes sur $\overline{B}$. Sa restriction à S atteint également ses bornes. Les deux questions sont indépendantes.
1. (Rolle) On suppose que f est constante sur S. Montrer qu'il existe un point de B où la différentielle de f s'annule.
2. (Principe du maximum) On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur B.
a. On suppose que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. Montrer que f atteint son maximum en un point de S.
b. On suppose que $\Delta f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in B$. En considérant la fonction $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon\,\|x\|_2^2$, montrer que f atteint son maximum en un point de S.
c. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in S$ et que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}$.

⇝ **1.** Si f est constante sur $\overline{B}$, alors sa différentielle est nulle en tout point. On suppose maintenant que f n'est pas constante. On note α la valeur de f sur S. Supposons par exemple que α n'est pas le minimum de f (sinon α n'est pas le maximum de f et on procède de la même manière). Soit alors $x_0 \in B$ un point où f atteint son minimum. Puisque f est différentiable en x_0 et admet un extremum en x_0, on en déduit que la différentielle de f en x_0 est nulle.

2. a. Supposons par l'absurde que f atteint son maximum en un point $x_0 \in B$. On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on note

$$\varphi_j(t) = f(x_0 + te_j).$$

φ_j est de classe C^2 comme composée de fonctions de classe C^2 et atteint son maximum en 0. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \varphi_j''(0) \leqslant 0.$$

Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on en déduit que

$$\Delta f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) \leqslant 0.$$

D'où la contradiction.

b. On suppose par l'absurde que f n'atteint pas son maximum en un point de S. Soit alors $x_0 \in B$ où f atteint son maximum. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in S, \quad f(x) + \varepsilon < f(x_0).$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{B}$ on note

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|_2^2 = f(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Cela définit une fonction de classe C^2 telle que

$$\forall x \in B, \quad \Delta f_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + 2n\varepsilon > 0.$$

Mais pour $x \in S$ on a

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon < f(x_0) \leqslant f_\varepsilon(x_0).$$

Ainsi f n'atteint pas son maximum sur S, ce qui donne une contradiction avec le résultat de la question précédente.

c. D'après la question précédente, f atteint son maximum sur S, donc $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \overline{B}$. D'autre part, pour tout $x \in B$ on a

$$\Delta(-f)(x) = -\Delta f(x) = 0,$$

donc $-f$ atteint son maximum sur S. Autrement dit, f atteint son minimum sur S. Ainsi $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \overline{B}$. Finalement on a bien $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}$. □

$\rightsquigarrow$ Remarques générales :

- Puisque ce n'est manifestement toujours pas clair, une fonction continue n'a pas nécessairement de dérivées partielles, n'est pas nécessairement différentiable (et encore moins « dérivable », puisque cela n'a pas de sens pour une fonction de plusieurs variables).
- On ne justifie pas l'existence d'une dérivée partielle après en avoir fait le calcul...
- Une fonction différentiable n'est pas nécessairement de classe C^1. Ainsi on ne peut pas prouver qu'une fonction n'est pas différentiable en montrant qu'elle n'est pas C^1.
- L'utilisation de suites est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limites en un point. C'est rarement (jamais) pertinant pour montrer qu'une fonction admet effectivement une limite.
- Ce n'est pas parce que f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ que l'image de f est forcément $\mathbb{R}^n$.
- Les arguments du type $\Delta f > 0$ donc la différentielle de f est strictement croissante n'ont évidemment aucun sens pour des fonctions de plusieurs variables...
- Le laplacien ne vérifie pas toutes les propriétés de la dérivée seconde de la dimension 1. Et même quand il se trouve que c'est le cas, il faut le démontrer !

□