Quelques corrections ou indications

Attention : certains corrigés sont rédigés, mais souvent on ne donne que le résultat. Faites bien le tri, car le jour de l'examen seules les solutions correctement rédigées sont acceptées. Si vous avez un doute, que ce soit pour les maths ou pour la rédaction, on en discute en cours !

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables. Normes.

Exercice 1.11

Pour montrer par exemple que $\|\cdot\|_1$ est contrôlée par $\|\cdot\|_\infty$, il suffit d'écrire que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j|}_{\leqslant \|x\|_\infty} \leqslant n \|x\|_\infty .$$

On remarque que si on a montré que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, alors ces deux normes sont automatiquement équivalentes entre elles.

D'autre part pour les inégalités faisant intervenir $\|\cdot\|_2$, on peut utiser le fait que si a et b sont des réels *positifs*, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $a^2 \leqslant b^2$.

2 Limites et continuité pour une fonction de plusieurs variables

Exercice 2.1

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme x_m tend vers l_1 quand m tend vers $+\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_1, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_2, \quad \|x_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $m \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|l_1 - l_2\| = \|(x_m - l_2) - (x_m - l_1)\| \leqslant \|x_m - l_2\| + \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que $\|l_1 - l_2\| = 0$, et donc que $l_1 = l_2$.

2. • On commence par montrer que $\lambda x_m \to \lambda l_1$. C'est clair si $\lambda = 0$. Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Pour tout $m \geqslant N$ on a alors

$$\|\lambda x_m - \lambda l_1\| = |\lambda|\,\|x_m - l_1\| \leqslant |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Cela prouve que λx_m tend vers λl_1 quand m tend vers $+\infty$.

• Montrons maintenant que $x_m + y_m$ tend vers $l_1 + l_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme x_m tend vers l_1 quand $m \to \infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_1, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_2, \quad \|y_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $m \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|(x_m + y_m) - (l_1 + l_2)\| = \|(x_m - l_1) + (y_m - l_2)\| \leqslant \|x_m - l_1\| + \|y_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Exercice 2.4

1. Pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0,$$

donc f tend vers 0 en (0,0).

2. Supposons par l'absurde que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en (0,0). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Alors u_n et v_n tendent vers (0,0) quand n tend vers l'infini, donc par le critère séquentiel pour les limites on obtient que

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l \quad \text{et} \quad f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = \frac{1}{2}$. On obtient donc que $l = 0$ et $l = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc f n'admet pas de limite en (0,0).

3. On suppose par l'absurde que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en (0,0). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right).$$

Alors u_n tend vers (0,0) quand n tend vers $+\infty$, donc $f(u_n)$ tend vers l. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(u_n) = \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{-\frac{1}{n^3}} = n + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi f n'a pas de limite (finie) en (0,0). (en considérant la suite $(1/n, -1/n + 1/n^3)$ on observe qu'on ne peut pas non plus dire que f tend vers $+\infty$).

4. On a

$$f(t,0) = 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

et

$$f(0,t) = -1 \xrightarrow[t\to 0]{} -1,$$

donc f n'a pas de limite en (0,0).

5. $$|f(x,y)| \leqslant |x| + |y| \to 0$$

6. $$f(t,0) = \frac{1}{t}$$

7. On a

$$\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0,$$

donc

$$f(x,y) = \frac{\sin(y)}{y} + (x^2+y^2)\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1 + 0 = 1.$$

8. $$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \leqslant 2r$$

9. $$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant 4r$$

3 Dérivées partielles - Différentielle.

Exercice 3.9

1. f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathrm{Jac}\, f$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $M_{2.3}(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices à 2 lignes et 3 colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$). Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\mathrm{Jac}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(y+z^2) & 2x & 4xz \\ -yz\sin(xyz) & -xz\sin(xyz) & -xy\sin(xyz) \end{pmatrix}.$$

3. $\operatorname{Jac} f(1,2,3)$ est une matrice de $M_{2,3}(\mathbb{R})$. On a
$$\operatorname{Jac} f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 12 \\ -6\sin(6) & -3\sin(6) & -2\sin(6) \end{pmatrix}.$$
4. $x \mapsto f(x,5,2)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x,5,2) = \begin{pmatrix} 18x \\ \cos(10x) \end{pmatrix}.$$
5. $d_{(0,0,0)}f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour h_1, h_2, h_3 on a
$$d_{(0,0,0)}f(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
6. $d_{(1,2,3)}f(1,2,3)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On a
$$d_{(1,2,3)}f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 62 \\ -18\sin(6) \end{pmatrix}.$$
7. ∇f n'est pas défini car f n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$.
8. $x \mapsto \partial_y f(x,2,4)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\partial_y f(x,2,4) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4x\sin(8x) \end{pmatrix}.$$
9. $\partial_z f$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a
$$\partial_z f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xz \\ -xy\sin(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.12

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ on a
$$f(x+h) = \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle .$$
On a $\langle u(x), x\rangle = f(x)$ et l'application $h \mapsto \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle$ est linéaire par rapport à h. D'autre part $|\langle u(h), h\rangle| \leqslant \|h\| \, \|u(h)\|$ et $\|u(h)\| \to 0$ quand $h \to 0$ (une application linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue). Tout cela prouve que f est différentiable en x de différentielle
$$d_x f : h \mapsto \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle .$$

Exercice 3.13

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(t) = \|tv\| = |t| \, \|v\|$. Comme $\|v\| \neq 0$, l'application φ n'est pas dérivable en 0, ce qui signifie que l'application norme n'est pas dérivable en 0 dans la direction v. Cela implique en particulier qu'elle n'est pas différentiable en 0.

4 Fonctions de classe C^1. Inégalité des accroissements finis

Exercice 4.1

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a $x^4 + y^2 \geqslant 2x^2 |y|$ donc

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|x|^3 |y|}{2x^2 |y|} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

ce qui prouve que f est continue en 0.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $f(x,0) = f(0,y) = 0$ donc les dérivées partielles de f existent en (0,0) et sont nulles. On suppose maintenant par l'absurde que f est différentiable en (0,0). Puisque f et sa différentielle s'annulent en (0,0) on a pour $h \in \mathbb{R}^2$

$$f(h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|).$$

Par équivalence des normes, on peut supposer avoir muni $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors $\|u_n\| = \frac{1}{n}$. On a

$$\frac{f(u_n)}{\|u_n\|} = \frac{\frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^4}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Cela contredit l'égalité précédente, et prouve par l'absurde que f n'est pas différentiable en (0,0). Ainsi le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1 est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Remarque : Plutôt que d'utiliser une suite (u_n) on peut raisonner avec un point qui varie continuement avec t :

$$\frac{f(t,t^2)}{\|(t,t^2)\|} = \frac{\frac{t^5}{2t^4}}{t} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

C'est plus agréable à écrire.

Exercice 4.2

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|x| |y|^3}{y^2} \leqslant |x| |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Cela prouve que f tend vers 0 en (0,0), et donc que f est continue en (0,0). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t,0) = 0$ et $f(0,t)$, donc les dérivées partielles de f existent en (0,0) et valent 0. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{y^5 - 3x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{3|x|^4 |y|^3}{4x^4y^2} + \frac{|y|^5}{y^4} \leqslant \frac{3}{4}|y| + |y| \frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{3x^5y^2 + xy^4}{(x^4+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{3|x|^5 |y|^2}{4x^4y^2} + \frac{|x| |y|^4}{y^4} \leqslant \frac{3}{4}|x| + |x| \frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Cela prouve que les dérivées partielles de f sont continues en (0,0). Ainsi f est de classe C^1 en (0,0) et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.5

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soient alors $K > 0$ et f une fonction K-lipschitzienne sur un domaine $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Alors pour tout $x \in \mathcal{U}$ tel que $\|x - a\| \leqslant \delta$ on a

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant K \|x - a\| \leqslant K\delta \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que f est continue en a. Ceci étant valable pour n'importe quel $a \in \mathcal{U}$, la fonction f est continue sur $\mathcal{U}$ (en fait elle est même uniformément continue).

Exercice 4.7

$\beta > 1$ puis $\beta > 3/2$.

5 Dérivées d'ordres supérieurs. Application à l'étude d'extrema.

Exercice 5.3

1. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y^3).$$
Ainsi le seul point critique de f est le point $(0, 0)$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a
$$f(x, y) > 0 = f(0, 0),$$
donc f admet un minimum global (et donc en particulier local) strict en (0,0). En outre f n'admet pas d'autre extremum local.
2. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, -4y^3).$$
Ainsi le seul point critique de f est le point $(0, 0)$. Pour $t \neq 0$ on a
$$f(t, 0) > 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, t) < 0 = f(0, 0).$$
Donc f n'admet pas d'extremum local en (0,0). Finalement f n'admet aucun extremum local.
3. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 0).$$
Ainsi les points critiques de f sont les points de la forme $(0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$, pour lesquels f s'annule. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$f(x, y) \geqslant 0,$$
donc f admet une droite de minimums globaux (et donc en particulier locaux). Ce ne sont pas des minimums stricts. En outre f n'admet pas d'autre extremum local.
4. La fonction f est l'opposée de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, qu'on a déjà étudiée. f admet donc un unique extremum local en (0,0), et c'est un maximum global strict.

Exercice 5.4

- La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

  $$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

  Les point critiques de f sont donc les points (0,0) et (1,1). D'autre part on a

  $$\det \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

  En (0,0) on a $\det \operatorname{Hess} f(x,y) < 0$, donc f admet un point selle. En (1,1) on a $\det \operatorname{Hess} f(x,y) > 0$ et $\Delta f(x,y) > 0$, donc f admet un minimum local strict. C'est donc le seul extremum local de f. Puisque

  $$f(0,y) = y^3 \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty,$$

  f n'admet pas de minimum global.
- (0,0), (1,1), (-1,-1), pas d'extremum, min global, min global.
- (0,1) minimum global, $(0, e^{-2})$ pas extremum local.
- (-2,2), minimum global.

6 Applications aux Équations aux Dérivées Partielles

Exercice 6.4

1. L'application ψ est de classe C^1 (chaque coordonnée est le produit de deux fonctions usuelles) et donc différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. $\tilde{f}$ est alors différentiable comme composée de fonctions différentiables.
2.
3. On a d'une part

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).$$

D'autre part, si on note $\varphi(t) = f(x + t\cos(\theta), y + t\sin(\theta))$ alors la dérivée de f au point (x,y) est

$$\varphi'(0) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puisque $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, cela donne bien l'égalité attendue.

Exercice 6.6

C'est sur ce genre d'exercice qu'il peut y avoir des embrouilles avec les notations. Pour éviter les confusions, on va prendre ici les notations $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ pour les dérivées partielles de f par rapport à sa première et sa deuxième variable respectivement. De même pour les différentes fonctions g.

- La fonction g_1 est de classe C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x, -x)$, qui sont toutes deux de classe C^1. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

  $$g_1'(x) = \partial_1 f(x,-x) - \partial_2 f(x,-x).$$

- La fonction g_2 est C^1 comme composée de f avec la fonction $(x,y) \mapsto (y,x)$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

  $$\partial_1 g_2(x,y) = 0 \times \partial_1 f(y,x) + 1 \times \partial_2 f(y,x) = \partial_2 f(y,x)$$

  et

  $$\partial_2 g_2(x,y) = \partial_1 f(y,x).$$

- La fonction $h : x \mapsto f(x,x)$ est C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x,x)$, et donc g_3 est C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x, h(x))$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} g_3'(x) &= \partial_1 f(x, f(x,x)) \times 1 + \partial_2 f(x, f(x,x)) \times h'(x) \\ &= \partial_1 f(x, f(x,x)) + \partial_2 f(x, f(x,x)) \left(\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)\right). \end{aligned}$$

- La fonction g_4 est C^1 comme composée de f avec la fonction $(x,y) \mapsto (y, h(x))$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_1 g_4(x,y) = \partial_2 f(y, f(x,x)) \left(\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)\right)$$

et

$$\partial_2 g_4(x,y) = \partial_1 f(y, f(x,x)).$$

Exercice 6.10

Indication : si f est solution, poser

$$\tilde{f}(u,v) = f\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right)$$

puis calculer

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}.$$

Exercice 6.12

On suppose que f est solution et on considère

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

$\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (comme composée de fonctions de classe C^1) et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = k\tilde{f}(r,\theta).$$

Ainsi il existe une fonction ϕ sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tilde{f}(r,\theta) = e^{k\theta}\phi(r)$. En outre ϕ est nécessairement de classe C^1 puisque $\tilde{f}$ l'est. Notant $\varphi : r \mapsto \phi(\sqrt{r})$, on obtient que $\tilde{f}(r,\theta) = e^{k\theta}\varphi(r^2)$. Ainsi pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$f(x,y) = \tilde{f}\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \varphi\left(x^2+y^2\right) e^{k\arctan\left(\frac{y}{x}\right)},$$

où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Inversement on vérifie que toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions.

Exercice 6.13

On suppose que f est solution et on considère

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

$\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (comme composée de fonctions de classe C^1 et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On en déduit que

$$r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = r.$$

Ainsi il existe une fonction ϕ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tilde{f}(r,\theta) = r + \phi(\theta)$. En outre ϕ est nécessairement de classe C^1 puisque $\tilde{f}$ l'est. Notant $\varphi : \theta \mapsto \phi(\tan\theta)$, on obtient que $\tilde{f}(r,\theta) = r + \varphi(\tan\theta)$. Ainsi pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$f(x,y) = \tilde{f}\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Inversement on vérifie que toutes les fonctions de cette forme sont bien solution.

Exercice 6.15

$\boxed{\Rightarrow}$ Il suffit de dériver l'égalité par rapport à t puis de l'évaluer en $t = 1$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t > 0$ on pose $g(t) = f(tx)$. Pour tout $t > 0$ on a alors

$$g'(t) = \frac{\alpha}{t}g(t),$$

ce qui implique que $g(t) = t^\alpha g(1)$, et donc $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

7 Théorème du point fixe - Théorème de l'inversion locale

Exercice 7.1

(iv) f est bien une fonction de Ω dans Ω, et Ω est bien fermé. Par contre l'application sin n'est pas contractante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, supposons qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que

$$\forall x,y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leqslant K\,|x-y|\,.$$

Alors pour tout $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$K \geqslant \frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1.$$

Cela prouve que $K \geqslant 1$, et donc f n'est pas contractante. Ainsi les hypothèses du théorème 7.1 ne sont pas toutes vérifiées. La conclusion est tout de même partiellement vérifiée, puisque f admet un unique point fixe sur Ω (il s'agit de 0). Par contre, étant donnés $x_0 \in \Omega$ et la suite des itérés $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n$ ne converge pas aussi rapidement vers le point fixe que dans le cas contractant. En ce sens la conclusion du théorème 7.1 n'est pas complètement vérifiée.

Exercice 7.5

L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car chaque fonction coordonnée est somme de composées de fonction polynômiales et exponentielles. Soit $(u,v,w) \in f(\mathbb{R}^3)$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u,v,w) = f(x,y,z)$. On a

$$\det \operatorname{Jac} f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{2y}(2e^{2x} + 2e^{2z}) < 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}$ de (x,y,z) et $\mathcal{V}$ de (u,v,w) dans $\mathbb{R}^3$ tel que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. En particulier, pour tout $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \mathcal{V}$ il existe $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in \mathcal{U}$ tel que $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$. Cela prouve que $\mathcal{V} \subset f(\mathbb{R}^3)$, et donc que $f(\mathbb{R}^3)$ est un voisinage de (u,v,w). Comme cela vaut pour tout $(u,v,w) \in f(\mathbb{R}^3)$, cela prouve que $f(\mathbb{R}^3)$ est ouvert. Enfin $f(\mathbb{R}^3)$ ne peut être égal à $\mathbb{R}^3$ puisque la première coordonnée de f ne prend que des valeurs positives.

Exercice 7.6

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = \big(2x + 3y + 5x^2y^3, x - y + \sin(x^6y^3)\big).$$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. On a $f(0,0) = (0,0)$ et

$$\det \operatorname{Jac}_{(0,0)} f = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale il existe des voisinage $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ tels que f réalise un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Il existe $r > 0$ tel que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b|$ on a $(a,b) \in \mathcal{V}$. Pour un tel couple (a,b), l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet donc une solution $(x,y) \in \mathcal{U}$.

8 Théorème des fonctions implicites

Exercice 8.5

L'application $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2y - 1.$$

En particulier on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe des ouverts I et J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\varphi : I \to J$ une fonction de classe C^∞ tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$ on a $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. Ainsi, au voisinage de (0,0), l'ensemble $\mathcal{C}$ coïncide avec le graphe de φ, que nous étudions maintenant. Pour tout $x \in I$ on a

$$x^4 + \varphi(x)^3 - x^2 - \varphi(x)^2 + x - \varphi(x) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$\forall x \in I, \quad 4x^3 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) - 2x - 2\varphi(x)\varphi'(x) + 1 - \varphi'(x) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi'(0) = 1$. En dérivant encore on obtient que

$$\forall x \in I, \quad 12x^2 + 6\varphi(x)\varphi'(x)^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) - 2 - 2\varphi'(x)^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi''(x) = 0,$$

et donc $\varphi''(0) = -4$. Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ au point (0,0) est la droite d'équation $y = x$, et $\mathcal{C}$ se trouve « sous » cette tangente (c'est-à-dire dans le demi-plan d'équation $y \leqslant x$) au voisinage de (0,0).

Au point (1,1), seule la dérivée par rapport à x est non-nulle. On exprime donc x en fonction de y. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts J et I de $\mathbb{R}$ contenant 1 et $\psi : J \to I$ de classe C^∞ tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$ on a $f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = \psi(y)$. Pour tout $y \in J$ on a

$$\psi(y)^4 + y^3 - \psi(y)^2 - y^2 + \psi(y) - y = 0$$

En dérivant on obtient

$$4\psi(y)^3\psi'(y) + 3y^2 - 2\psi(y)\psi'(y) - 2y + \psi'(y) - 1 = 0,$$

et donc $\psi'(1) = 0$ (comme on pouvait s'y attendre du fait que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0\ldots$). En dérivant à nouveau on a

$$12\psi(y)^2\psi'(y)^2 + 4\psi(y)^3\psi''(y) + 6y - 2\psi'(y)^2 - 2\psi(y)\psi''(y) - 2 + \psi''(y) = 0,$$

d'où $\psi''(1) = -\frac{4}{3}$. On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}$ au point (1,1) est la droite d'équation $x = 1$, et que $\mathcal{C}$ se trouve « à gauche » de cette tangente au voisinage de (1,1).

Exercice 8.12

[Attention, les calculs sont à vérifier] Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note

$$f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3.$$

On a $(x,y,z) \in \mathcal{S} \iff f(x,y,z) = 0$. En particulier $f(1,1,1) = 0$. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -3xy^2 - 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y^2 + 3z^2.$$

Ces trois dérivées sont non-nulles au point (1,1,1). On choisit par exemple de paramétrer $\mathcal{S}$ par une fonction de x et y. Comme $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (1,1) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 1 dans $\mathbb{R}$ et une fonction ϕ de classe C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ tels que pour tous $(x,y) \in \mathcal{U}$ et $z \in \mathcal{V}$ on a

$$(x,y,z) \in \mathcal{S} \quad \iff \quad z = \phi(x,y).$$

En particulier on a $\phi(1,1) = 1$. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0. \tag{1}$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,y,\phi(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = 0. \tag{2}$$

En particulier en (1,1) on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}.$$

De même en dérivant (1) par rapport à y on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y,\phi(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0 \tag{3}$$

et donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1) = \frac{5}{2}.$$

On obtient que les vecteurs $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(0, 1, \frac{5}{2}\right)$ appartiennent au plan tangent au graphe de ϕ et donc à la surface $\mathcal{S}$ en $(1, 1, 1)$. Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de ce plan tangent. Ainsi, le point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à ce plan tangent si et seulement si

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & z-1 \end{vmatrix} = \frac{x}{2} - \frac{5y}{2} + z + 1.$$

On calcule maintenant les dérivées secondes de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = -6xy - 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = -3y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = -2y.$$

En dérivant (2) par rapport à x et en appliquant le résultat en (1,1) on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1, 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, 1, 1)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1)\right)^2,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(1, 1) = -\frac{7}{4}.$$

De même en dérivant (3) par rapport à y on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1, 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, 1, 1)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1)\right)^2,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(1, 1) = -\frac{39}{4}.$$

Enfin en dérivant (2) par rapport à y ou bien (3) par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, 1)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, 1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1)\frac{\partial \phi}{\partial y}(1, 1),$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{19}{4}.$$

Ainsi la matrice Hessienne de ϕ au point (1,1) est

$$\operatorname{Hess} \phi(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{19}{4} & -\frac{39}{4} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est strictement négatif, donc le graphe de ϕ traverse son plan tangent au voisinage de (1,1) (cette propriété est équivalente au fait que la fonction $(x, y) \mapsto \phi(x, y) + \partial_x(1, 1)\phi(x-1) + \partial_y \phi(1, 1)(y-1)$ admet un point selle en (1,1)).

9 Intégrales multiples

Exercice 9.2

1. La fonction $(t,x) \mapsto \frac{e^{(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est de classe C^1 sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\,dt$$

2. La fonction f est également de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc h est de classe C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = g'(x) + 2f'(x)f(x) = g'(x) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ on effectue le changement de variable $t = xu$, $dt = x\,du$, ce qui donne

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x\int_0^1 e^{-u^2x^2}\,dt.$$

Ainsi pour tout $x \neq 0$ on a $h'(x) = 0$, ce qui prouve que h est constante sur $\mathbb{R}$.
3. On a

$$h(0) = g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}\frac{\pi}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Puisque h est constante sur $\mathbb{R}$, cela implique que

$$f(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Cela prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9.3

1. La fonction $(t,x) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ comme quotient de composées de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre pour tout $(t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a

$$0 \leqslant \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}dt \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ est convergente, donc par le théorème de continuité sous l'intégrale on obtient que ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x_0 > 0$. On montre que ψ est dérivable sur $\left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. L'application $(t,x) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. En outre pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$ on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\right| = e^{-(t^2+1)x} \leqslant e^{-(t^2+1)\frac{x_0}{2}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)\frac{x_0}{2}}\,dt$ est convergente, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que ψ est dérivable sur $\left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$, et donc en particulier en x_0, et

$$\psi'(x_0) = -\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)x_0}\,dt.$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 > 0$, cela prouve en particulier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a
$$\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$
Pour tout $x \geqslant 0$ on a
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2+1}\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
4. Soit $x > 0$. On a vu que
$$\psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)x}\,dt = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}\,dt.$$
On effectue le changement de variables $s = \sqrt{x}t$, $ds = \sqrt{x}dt$, et on obtient
$$\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds.$$
5. On a alors
$$\int_0^{+\infty} \psi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \times \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds$$
Dans la première intégrale on effectue le changement de variables $x = s^2$, $dx = 2sds$, ce qui donne bien l'égalité demandée.
6. D'autre part on a
$$\int_0^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to 0} f(0) = -\frac{\pi}{2},$$
et donc
$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 9.4

$$\frac{2}{3}\ln(2) \quad 2 \quad 16$$

Exercice 9.5

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{30}$$

Exercice 9.6

$$\frac{3}{20} \quad \frac{2}{75} \quad \sin(2)\ln(2) \quad \frac{275}{54} \quad 4\ln(2) - \frac{11}{4}$$

Exercice 9.7

$$\frac{22}{3} \quad 4 \quad \frac{8\sqrt{2}-2}{3}$$

Exercice 9.8

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x}{2} \ln(1+x^2+y^2) \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} \left(\ln(2+x^2) - \ln(2) \right) dx. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, donc

$$I = \frac{1}{4} \left[(2+x^2)\ln(2+x^2) - (2+x^2) - x^2 \ln(2) \right]_0^1 = \frac{3}{4} \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}.$$

Exercice 9.9

$$\frac{(1-z_0)^3}{6} \qquad \frac{1}{24}$$

Exercice 9.10

Pour $x \in [-1,1]$ on note $D(x)$ l'intersection de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ avec le plan $\{x\} \times \mathbb{R}^2$. C'est un disque de rayon $\sqrt{1-x^2}$ et donc d'aire $\pi(1-x^2)$. On a alors

$$\begin{aligned} \iiint_D \cos(x)\, dx\, dy\, dz &= \int_{x=-1}^1 \cos(x) \left(\iint_{D(x)} 1\, dy\, dz \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2)\cos(x)\, dx = 4\pi(\sin(1) - \cos(1)). \end{aligned}$$

Pour la fin du calcul, on peut par exemple effectuer une double intégration par parties.

10 Changement de variables dans une intégrale multiple

Exercice 10.2

En passant aux coordonnées cylindriques on obtient

$$\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = \int_{z=0}^2 z \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=2}^4 \frac{r}{r}\, dr\, d\theta\, dz = 8\pi.$$

Exercice 10.3

Comme pour une ellipse en dimension 2, on effectue le changement de variable $(x,y,z) = (aX, bY, cZ)$. Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{E}) &= \int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b \int_{z=-c}^c \mathbb{1}_{[0,1[} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz \\ &= abc \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \int_{z=-1}^1 \mathbb{1}_{[0,1[} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dx\, dy\, dz \\ &= abc\mathcal{V}(B(0,1)). \end{aligned}$$

On rappelle le calcul pour le volume de la boule unité, par passage aux coordonnées sphériques. On considère l'application

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} =]0,1[,]0,2\pi[,\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Pour $(r,\theta,\phi) \in \mathcal{D}$ on a

$$\begin{aligned} \det \operatorname{Jac}_{(r,\theta,\phi)} \Psi &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\sin(\phi) \end{vmatrix} \\ &= r^2\left(\cos(\phi)\left(-\sin(\phi)\cos(\phi)\right) - \sin(\phi)\sin^2(\phi)\right) \\ &= -r^2\sin(\phi). \end{aligned}$$

On n'a pas $\Psi(\mathcal{D}) = B(0,1)$ (mais c'est vrai à ensemble de mesure nulle près, petite subtilité à discuter ici) mais

$$\mathcal{V}(B(0,1)) = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\left|\sin(\phi)\right| \, d\phi\, d\theta\, dr = \frac{1}{3} \times 2\pi \times \times 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 10.5

On fait le changement de variables $(x,y) = (ar\cos(\theta), br\sin(\theta))$ (justifier !) et on obtient

$$\begin{aligned} \int_D (2x^3 - y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a^3r^3\cos(\theta)^3 - br\sin(\theta))\, abr\, dr\, d\theta \\ &= \frac{2a^4b}{5}\left[\frac{1}{12}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{ab^2}{3} \\ &= \frac{4a^4b}{15} - \frac{ab^2}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 10.6

On note $R =]a,b[\times]0,1[$. Pour $(x,y) \in D$ on note

$$\phi(x,y) = (xy, y^2 - x^2).$$

En particulier pour tout $(x,y) \in D$ on a $\phi(x,y) \in R$. Montrons que ϕ réalise une bijection de D dans R. Soit $(u,v) \in R$. Pour $(x,y) \in D$ on a

$$(u,v) = \phi(x,y) \iff \begin{cases} u = xy \\ v = y^2 - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{u}{x} \\ x^4 + vx^2 - u^2 = 0 \end{cases}$$

Montrons que le polynôme $X^2 + vX - u^2$ admet une unique racine positive. Son discriminant est $\Delta = v^2 + 4u^2 > 0$ donc il admet deux racines. Comme son coefficient dominant est positif et sa valeur en 0 est strictement négative, il admet une racine strictement négative et une racine strictement positive, qu'on note ρ. Ainsi x est solution de $x^4 + vx^2 - u^2 = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{\rho}$ (x est positif). Finalement on obtient

$$(u,v) = \phi(x,y) \iff x = \sqrt{\rho}, y = \frac{u}{\sqrt{\rho}}.$$

Cela prouve que ϕ est une bijection de D dans R. En outre $\det \operatorname{Jac}_{(x,y)} \phi = 2(x^2 + y^2) > 0$. D'après le théorème d'inversion global, ϕ est un C^1-difféomorphisme et

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_R v^u\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_a^b \int_0^1 v^u\, dv\, du = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

11 Intégrales curvilignes

Exercice 11.2

$$\frac{69}{4} \qquad 2\sin(1) - 1 \qquad -\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 11.3

1.

$$0 \qquad -\frac{1}{15}$$

2. La forme ω n'est pas exacte car l'intégrale d'une forme exacte le long d'une courbe paramétrée ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Exercice 11.4

2π

Exercice 11.5

$$-\frac{a^3\pi}{4} \quad ; \quad 4ab\pi(a-b).$$

Exercice 11.6

$$\frac{\pi}{2} - 1$$

12 Théorème de Poincaré - Formule de Green-Riemann

Exercice 12.1

Le demi-plan $\mathcal{U}$ est étoilé car convexe. On s'assure que ω est exacte par le théorème de Poincaré. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ telle que $df = \omega$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

En intégrant la deuxième égalité par rapport à y et à $x > 0$ fixé on obtient qu'il existe une fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + g(x).$$

Nécessairement g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et en réinjectant dans la première équation on obtient que g est constante. Ainsi les primitives de la 1-forme ω sur $\mathcal{U}$ sont les fonctions de la forme

$$(x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.2

1. Puisque $\mathcal{U}$ est étoilé, on peut s'assurer que la forme ω est exacte en vérifiant qu'elle est fermée (mais ce n'est pas nécessaire, puisqu'on va de toutes façons exhiber les primitives). Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ telle que $df = \omega$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y}.$$

D'après la première equation il existe une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + g(y).$$

D'après la deuxième équation on obtient que g est une fonction constante. Ainsi les primitives de ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{y} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. On a

$$\int_\Gamma \omega = f(3.8) - f(1,2) = \frac{5}{8}.$$

Exercice 12.3

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note $P(x,y) = y^3 - 6xy^2$ et $Q(x,y) = 3xy^2 - 6x^2y$. On a alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3y^2 - 12xy = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Cela prouve que ω est fermée et donc exacte sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Poincaré (car $\mathbb{R}^2$ étoilé).

2. Pour faire ce calcul, on a plusieurs possibilité. On peut paramétrer ce demi-cercle et faire le calcul, ce qu'on n'a pas envie de faire. On peut utiliser un paramétrage du segment $[A,B]$, ce qui est plus simple et donne le même résultat. On considère $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1+2t, 2+2t)$ et donc

$$\begin{aligned}
\int_g \omega &= \int_0^1 \big(2(2+2t)^3 - 12(1+2t)(2+2t)^2 + 6(1+2t)(2+2t)^2 - 12(1+2t)^2(2+2t)\big)\,dt \\
&= \int_0^1 \big(-4(2+2t)^3 + 6(2+2t)^2 - 12(1+2t)^3 - 12(1+2t)^2\big)\,dt \\
&= \left[-\frac{32}{4}(1+t)^4 + \frac{24}{3}(1+t)^3 - \frac{12}{8}(1+2t)^4 - \frac{12}{6}(1+2t)^3\right]_0^1 \\
&= -120 + 56 - 120 - 52 = -236.
\end{aligned}$$

Mais le plus simple est de calculer une primitive de ω. On choisit $f : (x,y) \mapsto xy^3 - 3x^2y^2$ et on obtient

$$\int_C \omega = f(B) - f(A) = 192 - 432 - 8 + 12 = -236.$$

3. Puisque γ va de A à B et que ω est exacte, on obtient le même résultat.

Exercice 12.4

1. Comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, ω est exacte si et seulement si elle est fermée, ce qui est vrai si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Les fonctions φ qui conviennent sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{1+x^2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Une primitive est la fonction $(x,y) \mapsto -\frac{y}{1+x^2}$.

3. Γ est une ellipse, et en particulier une courbe fermée. L'intégrale de la forme exacte ω le long de cette courbe est donc nulle.

Exercice 12.5

$$\text{Aire}(A) = \int_{\gamma_{ext}} x\,dy - \int_{\gamma_{int}} x\,dy = -\int_0^{2\pi} (4-1)\sin^2(\theta)\,d\theta = 3\pi.$$

Exercice 12.6

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-\cos(\theta)\sin(\theta)^3 + 2\cos(\theta)^2\sin(\theta)\big)\,d\theta = \left[-\frac{\sin(\theta)^4}{4} - \frac{2\cos(\theta)^2}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12}.$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (-2r^3\cos(\theta)\sin(\theta) + 2r^2\sin(\theta))\,dr\,d\theta = \frac{5}{12}.$$

Exercice 12.7

1. $d\omega = (x^2+y)\,dx\wedge dy$,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R (r^3\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta))\,dr\,d\theta =$$

2. $d\omega = 2\,dx\wedge dy$ donc $I = 2\pi R^2$.
3. $d\omega = 2x\,dx\wedge dy$ donc

$$I = \int_1^2 2x(2-2x)\,dx =$$

Exercice 12.8

$$12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)\sin^2(\theta)\,d\theta = \frac{3\pi}{8}.$$

Exercice 12.9

1. L'application $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $]0,1]$. En outre $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est faussement généralisée.

Les applications $f : t \mapsto \sin(t)$ et $g : t \mapsto 1/t$ sont de classe C^∞ sur $[1,+\infty[$. La fonction g est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, et pour tous $x, y \in [1,+\infty[$ on a

$$\left|\int_x^y \sin(t)\,dt\right| = |\cos(x) - \cos(y)| \leqslant 2.$$

Par la règle d'Abel, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est donc convergente. Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est bien convergente.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on note

$$P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big) \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big).$$

Les fonctions P et Q sont de classe C^1 et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$
$$= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\big(-x(x^2+y^2)\sin(x) + y(x^2+y^2)\cos(x) - (x^2+y^2)\cos(x) - 2xy\sin(x) + 2y^2\cos(x)\big)$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$
$$= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\big((x^2+y^2)\cos(x) - x(x^2+y^2)\sin(x) + y(x^2+y^2)\cos(x) - 2x^2\cos(x) - 2xy\cos(x)\big).$$

On a donc donc
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$
Cela signifie que la forme ω est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\Gamma_R} \omega = \int_{D_R} \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) dx\, dy = 0.$$

4. Soit $r > 0$. La courbe γ_r peut être paramétrée par l'application $\theta \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ pour $\theta \in [0,\pi]$. On a alors

$$\begin{aligned} I_r &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin(\theta)}}{r^2}\big(-r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(r\cos(\theta)) + r^2\sin(\theta)^2\cos(r\cos(\theta))\big)\, d\theta \\ &+ \int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin(\theta)}}{r^2}\big(r^2\cos(\theta)^2\cos(r\cos(\theta)) + r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(r\cos(\theta))\big)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta))\, d\theta. \end{aligned}$$

Pour tout $r > 0$ et pour tout $\theta \in [0,\pi]$ on a

$$\left|e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta))\right| \leqslant 1.$$

En outre pour tout $\theta \in]0,\pi[$ on a

$$e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta)) \xrightarrow[r\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta)) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée on a donc

$$I_r \xrightarrow[r\to 0]{} \pi \quad \text{et} \quad I_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

5. Pour tout $R > 1$ on a

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Gamma_R} \omega &= I_R - I_{1/R} + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \\ &= I_R - I_{1/R} + 2\int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \\ &\xrightarrow[R\to+\infty]{} -\pi + 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt. \end{aligned}$$

Cela prouve que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

13 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 13.2

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $F(x, y, z) = (4xy + 2xz + 4y - z, xy + xz + 2x - z) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi on a $\mathcal{C} = F^{-1}(\{(0, 0)\})$. D'autre part

$$\operatorname{Jac} F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\operatorname{Jac} F(0, 0, 0)$ est de rang 2, donc $\operatorname{Jac} F(0, 0, 0)$ est de rang 2 au voisinage de (0,0,0). Cela prouve que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de dimension 1 au voisinage de (0,0,0). En outre la tangente à $\mathcal{C}$ en (0,0,0) est

$$\ker \operatorname{Jac} F(0, 0, 0) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.3

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $F(x, y, z) = xy+xz+2x+2y-z \in \mathbb{R}$. Ainsi on a $\mathcal{S} = F^{-1}(\{0\})$. On a

$$\operatorname{Jac} F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\operatorname{Jac} F(0, 0, 0)$ est de rang 1, donc $\operatorname{Jac} F(0, 0, 0)$ est de rang 1 au voisinage de (0,0,0). Cela prouve que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension 2 au voisinage de (0,0,0). En outre le plan tangent à $\mathcal{S}$ en (0,0,0) est

$$\ker \operatorname{Jac} F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^{\perp} = vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 13.4

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\nabla F(x, y) = (2x, -2y)$. Ainsi ∇F ne s'annule qu'en (0,0), où F vaut 0. Cela prouve que pour tout $\alpha \neq 0$ l'ensemble défini par l'équation $F(x, y) = \alpha$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $F^{-1}(\{0\})$ n'est pas une sous-variété au voisinage de (0,0). Saurez-vous le justifier ?

Exercice 13.7

1. Soit $t \in]a, b[$. Soit F une équation pour M au voisinage de $\gamma(t)$. L'application $s \mapsto F(\gamma(x))$ est bien définie, différentiable et nulle au voisinage de t. Ainsi on a

$$d_{\gamma(t)} F(\gamma'(t)) = 0.$$

Cela prouve que $\gamma'(t) \in \ker d_{\gamma(t)} F = T_{\gamma(t)} M$.
2. Soit φ un paramétrage local de M en a, défini sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^p$, avec $\varphi(0) = a$. Puisque $h \in T_a M = \operatorname{Im} d_0\varphi$, il existe $\eta \in T_0\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^p$ tel que $d_0\varphi(\eta) = h$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $t\chi \in \mathcal{V}$ si $|t| < \varepsilon$. On note alors $\gamma(t) = \varphi(t\eta)$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Cela définit une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de classe C^1, on a bien $\gamma(0) = \varphi(0) = a$ et $\gamma'(0) = d_0\varphi(\eta) = h$.