Calcul Différentiel et Intégral

Examen final - mercredi 06 janvier 2016

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 7,\, 8 - x < y < x + 1\}.$$

1. Dessiner D.
2. Calculer : $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy.$

Exercice 2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120.$$

Étudier les éventuels extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ (question bonus : étudier les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f et les expliciter lorsqu'elles sont définies.
3. Montrer que f est différentiable en (0,0) et préciser la différentielle.

Exercice 4. On considère l'arc paramétré

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{cases}$$

et la forme différentielle $\omega = x\, dy - y\, dx$.
1. Calculer l'intégrale de ω le long de γ.
2. Calculer l'intégrale de ω le long du segment s joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.
3. Déterminer si la forme ω est exacte.
4. Montrer que l'image de γ est incluse dans le domaine $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leqslant x\right\}$.
5. Calculer l'aire du domaine délimité par l'arc γ et le segment s (on admet que le bord de ce domaine est exactement donnée par l'union des images de γ et de s).

Exercice 5. On considère une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

On note

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(f(x,y),y) = 0\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ définie d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ vers un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble C coïncide avec le graphe de φ.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x,y) \in C$ on a $y \geqslant 0$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.