Chapitre 8

Théorème des fonctions implicites

Le but de ce chapitre est d'étudier les ensembles de $\mathbb{R}^n$ défini par une équation de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Cela signifie que l'on considère la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

On sait déjà étudier quelques cas simples. Par exemple, on est capable de représenter les ensembles de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$2x + 3y - 1 = 0, \quad y - \cos(x\pi)x^2 = 0, \quad x + \cos(y)y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Dans les deux premiers cas, le plus simple pour étudier l'ensemble considéré est de réécrire l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$. L'ensemble étudié n'est alors rien de plus que le graphe de la fonction φ. On en déduit qu'on a affaire à une courbe, et peut obtenir toutes sortes d'informations utiles. Par exemple, en calculant la dérivée de la fonction φ, on peut obtenir la tangente à cette courbe en tout point.

Dans le troisième cas on ne peut pas mettre l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$, mais on peut la mettre sous la forme $x = \varphi(y)$. On peut alors procéder exactement de la même façon, à ce détail près qu'il faut étudier le graphe d'une fonction pour laquelle c'est l'abscisse qui dépend de l'ordonnée. Il faut être prudent car c'est inhabituel, mais cela ne pose pas de difficulté profonde. Pour le dernier cas, on a simplement reconnu l'équation bien connue d'un cercle.

***Exercice* 8.1.** Représenter les quatres ensembles considérés ci-dessus et donner dans chaque cas une équation de la tangente au point (1,-1).

Les choses se compliquent si on considère par exemple l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Il ne s'agit pas d'un ensemble que l'on est capable d'identifier à l'œil nu, et il n'est pas clair du tout qu'on puisse mettre l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(y)$ pour une certaine fonction φ.

Revenons au cas du cercle. Il est bien clair qu'un cercle n'est le graphe d'aucune fonction, ni d'une fonction exprimant y en fonction de x, ni d'une fonction exprimant x en fonction de y (pourquoi ?). On peut tout de même dire que le cercle est l'union de deux demi-cercles, le demi-cercle supérieur qui est le graphe de la fonction $\varphi_h : x \mapsto \sqrt{2 - x^2}$ pour $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, et le demi-plan inférieur, graphe de la fonction $\varphi_b : x \mapsto -\sqrt{2 - x^2}$ pour $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Cette observation est suffisante par exemple pour étudier la tangente au point (1,-1) : il suffit d'oublier la partie supérieure du cercle et d'utiliser le fait qu'au voisinage du point (1,-1) le cercle est le graphe de la fonction φ_b.

Cette astuce ne suffit pas pour les points $(-\sqrt{2},0)$ et $(\sqrt{2},0)$. Aux voisinages de ces points le cercle ne coïncide pas simplement avec le graphe de φ_h ou celui de φ_b. Mais au voisinage de $(-\sqrt{2},0)$ on peut voir le cercle comme le graphe d'une fonction qui donne l'abscisse en fonction de l'ordonnée, $\varphi_g : y \mapsto \sqrt{2-y^2}$ pour $y \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Et de même au voisinage de $(\sqrt{2},0)$ avec la fonction $\varphi_d : y \mapsto -\sqrt{2-y^2}$ pour $y \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Pour l'étude au point (1,-1) on peut utiliser indifféremment la fonction φ_b ou la fonction φ_d.

Le but du théorème des fonctions implicites est de montrer que sous certaines hypothèses sur la fonction F, l'ensemble d'équation $F(x,y) = 0$ peut être vu au voisinage de certains de ses points que le graphe d'une fonction (donnant y en fonction de x ou x en fonction de y).

On remarque qu'au début du cours on a introduit les lignes de niveaux d'une fonction pour mieux comprendre la fonction en question. Ici la démarche est inverse. On va étudier la fonction F pour mieux comprendre l'une de ses lignes de niveaux.

Avant de chercher à montrer un théorème, il est bon de se demander sur un dessin ce qu'il est raisonnable d'espérer.

***Exercice* 8.2.** Les figures 8.1 à 8.3 représentent un même ensemble E de $\mathbb{R}^2$. Sur la figure 8.1, marquer les points pour lesquels il est impossible de trouver un voisinage $\mathcal{U}$ tel que $E \cap \mathcal{U}$ est le graphe d'une fonction continue donnant y en fonction de x. Sur la figure 8.2, même question en remplaçant « fonction continue » par « fonction de classe C^∞ ». Et sur la figure, 8.3, échager les rôles de x et y.

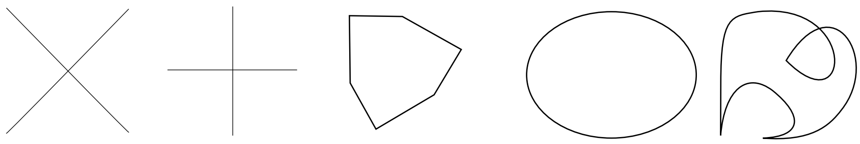


Figure 8.1 – Où l'on ne peut décrire localement y comme une fonction continue de x.

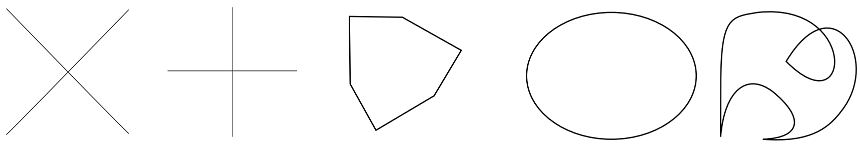


Figure 8.2 – Où l'on ne peut décrire localement y comme une fonction lisse de x.

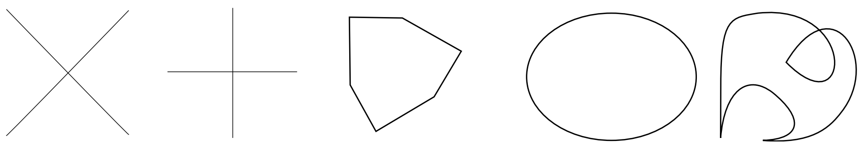


Figure 8.3 – Où l'on ne peut décrire localement x comme une fonction lisse de y.

On énonce maintenant le théorème des fonctions implicites dans le cas particulier d'une « courbe » de $\mathbb{R}^2$. Le théorème général et la démonstration seront donnés plus loin.

Théorème 8.1 (Théorème des fonctions implicites, version $\mathbb{R}^2$)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k, avec $k \geqslant 1$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$F(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Alors il existe des voisinages $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de a et b dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad F(x,y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de sorte que la dérivée partielle $\partial_y F$ ne s'annule pas sur $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et alors

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \phi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x))}.$$

Remarque 8.2. Si la dérivée partielle de F par rapport à x est non nulle en (a,b), alors de la même façon l'ensemble d'équation $F(x,y) = 0$ coïncide au voisinage de (a,b) avec le graphe donnant x en fonction de y.

Heuristique. Si on oublie les restes d'ordre 2 ou plus on peut écrire

$$F(x,y) \simeq \underbrace{F(a,b)}_{=0} + (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 \quad &\iff \quad (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \simeq 0 \\ &\iff \quad y \simeq b - (x-a)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}. \end{aligned}$$

C'est bien une formule donnant y en fonction de x. Bien entendu, le symbole $\simeq$ n'a pas de sens et ce calcul n'est en aucun cas une démonstration.

Remarque 8.3. Il est fortement déconseillé de chercher à retenir la formule pour la dérivée de ϕ. Par contre il faut savoir qu'elle existe et comment la retrouver : une fois l'existence de ϕ démontrée, on écrit que pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a

$$F\big(x, \phi(x)\big) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient pour tout $x \in \mathcal{V}$

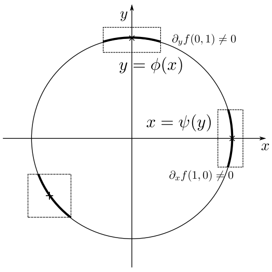
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi(x)) + \phi'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x)) = 0,$$

ce qui donne bien la formule attendue pour ϕ'. En pratique il faut refaire ce raisonnement simple, et non apprendre la formule puis se tromper en l'utilisant.

Exemple 8.4. On revient sur le cercle

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 - x^2 - y^2 = 0\right\}.$$

Alors on a $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x,y) = 0\right\}$, où $F : (x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est de classe C^∞. Les dérivées partielles sont $\partial_x F : (x,y) \mapsto -2x$ et $\partial_y F : (x,y) \mapsto -2y$. La dérivée par rapport à y est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (1,0) et (-1,0). Autour de tout point de $\mathcal{C}$ exceptés (1,0) et (-1,0) on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x. La dérivée par rapport à x est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (0,1) et (0,-1). Et c'est effectivement autour de ces deux points qu'on ne peut pas voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant x en fonction de y.



C'est une bonne idée de bien avoir cet exemple du cercle en tête. Il peut par exemple arriver qu'on oublie quelle dérivée doit être non nulle pour pouvoir exprimer telle variable en fonction de telle autre. Il est bon de se remémorer le cercle et les quatre points pour lesquels on sait quelle dérivée est nulle et quelle variable peut être exprimée en fonction de l'autre.

FIGURE 8.4 – Théorème des fonctions implicites pour $F : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$.

***Exercice* 8.3.** On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0 \qquad (*)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in D_\varphi \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction ψ sur un domaine $D_\psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in D_\psi \text{ et } x = \psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions φ et ψ ?

***Exercice* 8.4.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = x^2+y^2-1$. Montrer que pour x suffisament proche de 0 il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0 :

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

***Exercice* 8.5.** Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\right\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

***Exercice* 8.6.** On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point (1,1) et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

On s'intéresse maintenant à la version générale du théorème des fonctions implicites. Le principe est le même, sauf que l'on considère des ensembles de $\mathbb{R}^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}^*$, définis par m équations pour n'importe quel $m \in \mathbb{N}^*$ (ou, ce qui est équivalent, par une équation dans $\mathbb{R}^m$).

***Exercice* 8.7.** Décrire les ensembles définis de la façon suivante.

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\},$$

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix} = 0\right\},$$

et

$$E_3 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix} = 0\right\}.$$

On note que dans les deux derniers cas, 0 désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$.

On peut énoncer le théorème des fonctions implicites de la façon suivante :

Théorème 8.5 (Théorème des fonctions implicites, version générale)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k, avec $k \geqslant 1$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tel que $f(a,b) = 0$ et la différentielle partielle $D_y f(a,b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de sorte que la différentielle $D_y f(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et

$$d\phi(x) = -D_y f(x,\phi(x))^{-1} \circ D_x f(x,\phi(x)).$$

Ici $D_y f(a,b)$ est la différentielle de l'application $y \in \mathbb{R}^p \mapsto f(a,y) \in \mathbb{R}^p$ au point b. Au départ f est une fonction de $n+p$ variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si on fixe n variables, on obtient une fonction de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. La différentielle partielle $D_y f(a,b)$ est alors la différentielle de cette fonction au point b, les n premières variables étant fixées à $a = (a_1, \dots, a_n)$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est

$$\operatorname{Jac}_y f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+p}}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+p}}(a,b) \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

Remarque 8.6. Dans le cas où $m \neq p$, pour se souvenir quelle différentielle est supposée inversible, il suffit de se rappeler qu'une différentielle ne peut être inversible que si c'est une application entre espaces de mêmes dimensions.

***Exercice* 8.8.** On reprend les ensembles de l'exercice 8.7.
1. La conclusion du théorème 8.1 fournit un paramétrage de l'ensemble considéré par une fonction qui donne une variable en fonction d'une autre. Sans chercher pour le moment à vérifier les hypothèses du théorème, dire quel type de paramétrage on attend aux voisinage des points où on pourra effectivement appliquer le théorème (combien de variables exprimées en fonction de combien d'autres).
2. Décrire l'ensembles des points de E_1, E_2 et E_3 pour lesquels on peut appliquer le théorèmes des fonctions implicites.

***Exercice* 8.9.** En s'inspirant des théorèmes 8.1 et 8.5, écrire une version du théorème des fonctions implicites adaptée à un ensemble d'équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ où $n \geqslant 3$ et F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

La démonstration du théorème des fonctions implicites repose sur le théorème de l'inversion locale :

Démonstration. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on pose $g(x,y) = (x, f(x,y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Cela définit une fonction de classe C^k sur $\mathcal{U}$. En outre on a

$$\det \operatorname{Jac} g(a,b) = \begin{vmatrix} I_m & 0_{m,p} \\ \operatorname{Jac}_x f(a,b) & \operatorname{Jac}_y f(a,b) \end{vmatrix} = \det \operatorname{Jac}_y f(a,b) \neq 0,$$

où I_m est la matrice identité de taille $m \times m$ et $0_{m,p}$ la matrice à m lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale. Il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de (a,b) dans $\mathcal{U}$ tel que g réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ sur son image. Soient $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{W}$ un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W} \subset \tilde{\mathcal{U}}$. Comme $g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+p}$ contenant $(a,0)$, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{V} \times \{0\} \subset g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$. Étant donné $x \in \mathcal{V}$ il existe donc un unique $y \in \mathcal{W}$

(qu'on note $\phi(x)$) tel que $(x,0) = g|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}(x,\phi(x))$. Comme $(x,\phi(x)) = (g|_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}})^{-1}(x,0)$, ϕ est une fonction de classe C^k. Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a donc

$$f(x,\phi(x)) = 0.$$

En différentiant on obtient

$$D_x f(x,\phi(x)) + D_y f(x,\phi(x)) d\phi(x) = 0,$$

ce qui donne l'expression pour la différentielle de ϕ. $\square$

***Exercice* 8.10.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$ et $f(x,\varphi(x)) = (0,0)$ pour tout $x \in I$.

***Exercice* 8.11.** On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^4 & + & y^3 & + & z^4 & + & t^2 & = & 0, \\ x^3 & + & y^2 & + & z^2 & + & t & = & 2, \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,-1,1,0) et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe C^1 au voisinage de 0 tels que $(x,y,z,t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x,y,z) = \varphi(t)$.
2. Calculer la dérivée de φ en 0.

***Exercice* 8.12.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3,$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$.
1. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (1,1,1).
2. Vérifier qu'au voisinage du point (1,1,1), la surface $\mathcal{S}$ est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x,y)$ où ϕ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de (1,1).
3. Écrire le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au point (1,1).
4. Donner la matrice Hessienne de ϕ au point (1,1).
5. Quelle est la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent au point (1,1).

***Exercice* 8.13.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation $(x-a)(b-x) + \varepsilon x^3 = 0$ admet trois solutions distinctes (qu'on note $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ avec $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$). Donner un développement asymptotique de x_1, x_2 et x_3 jusqu'à l'ordre $0(\varepsilon^2)$.

***Exercice* 8.14.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ est $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0, alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continuement de A.