Chapitre 3

Dérivées partielles - Différentielle.

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de dérivée pour une fonction f de plusieurs variables. L'objectif est évidemment de donner une définition qui permet de retrouver autant que possible toutes les bonnes propriétés de la dérivation d'une fonction d'une variable :

- En tout point x_0 où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple (affine) qui approche bien f au moins pour des points proches de x_0, comme c'est le cas pour l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.
- En particulier on attend d'une fonction dérivable qu'elle soit continue.
- La dérivée doit permettre d'étudier les variations de f, localiser et étudier les extréma.
- etc.

3.1 Dérivabilité pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.

On commence par s'intéresser aux fonctions d'une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, pour constater que dans ce cas il n'y a que peu de différences avec les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne donc un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I dans $\mathbb{R}^p$:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{array} \right.$$

où $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *La fonction f est continue sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont.*

***Exercice* 3.1.** Montrer la proposition 3.1.

La dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle est définie de la même façon quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ que quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Définition 3.2.

- Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si le quotient
$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{3.1}$$
admet une limite dans $\mathbb{R}^p$ quand t tend vers t_0. Dans ce cas on note $f'(t_0)$ cette limite.
- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas on appelle fonction dérivée l'application $f' : t_0 \mapsto f'(t_0)$.

Proposition 3.3. *La fonction f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont, et dans ce cas on a pour tout $t \in I$:*

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_p'(t)).$$

A la lumière des propositions 3.1 et 3.3 on voit que l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ne pose pas vraiment de difficulté nouvelle. Il suffit de travailler coordonnée par coordonnée. Ainsi on retrouve sans problèmes les propriétés de base de la dérivée (linéarité, dérivation du produit entre une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, dérivée de la composée $f \circ g$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, etc.)

Il faut tout de même faire attention à quelques subtilités. Par exemple le théorème de Rolle et ses conséquences ne sont plus valables pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

***Exercice* 3.2.** On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = f(2\pi)$, et que pourtant la dérivée f' ne s'annule jamais.

Malheureusement, le quotient (3.1) n'a plus de sens si les variables t et t_0 sont des points de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la notion de dérivabilité ne peut pas être adaptée simplement à des fonctions de plusieurs variables. Il va donc falloir travailler un peu plus dans ce cas...

3.2 Dérivées partielles

Pour la suite de ce chapitre, on se donne un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction f de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La première idée pour généraliser la notion de dérivabilité à des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ est de définir les dérivées partielles :

Définition 3.4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe au point a si l'application

  $$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) = f(a + te_k)$$

  (définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$) est dérivable en 0. Dans ce cas on note

  $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_k f(a)$$

  cette dérivée.
- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe sur $\mathcal{U}$ si elle existe en tout point de $\mathcal{U}$.

Les dérivées partielles ne sont finalement rien de plus que des dérivées au sens usuel (au sens du paragraphe précédent si $p \geqslant 2$). Pour dériver par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive comme on a l'habitude par rapport à la variable qui nous intéresse.

Remarque 3.5. Souvent, on note (x, y) et (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2) et (x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, respectivement. Dans ce cas on notera par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ la dérivée partielle par rapport à la première variable. Les choses peuvent devenir ambiguës quand d'autres variables entrent en jeu, typiquement lorsqu'on change de coordonnées. Il faudra donc être (très) vigilants en lisant et en écrivant des calculs faisant intervenir des dérivées partielles.

***Exercice* 3.3.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions

$$f_1 : (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que les fonctions f_1, f_2, f_3 admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à x et à y, et les expliciter.

***Exercice* 3.4.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f_1(x,y) = e^x \cos(y), \quad f_2(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}, \quad f_3(x,y) = x^y \quad (\text{pour } x > 0).$$

L'exemple suivant montre que l'étude des dérivées partielles ne répond pas à toutes nos attentes puisqu'une fonction peut avoir des dérivées partielles bien définies en tout point sans nécessairement être continue :

Remarque 3.6. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles selon x et selon y mais n'est pas continue en (0,0) (voir l'exemple 2.12)

L'existence des dérivées partielles en (0,0) pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ assure que f « paraît continue » tant qu'on se déplace le long des axes des abscisses ou des ordonnées. Dans l'exemple précédent, le problème vient du fait que ce n'est plus du tout le cas si on approche du point (0,0) en suivant par exemple la droite d'équation $x = y$.

Ce problème peut être évité si au lieu de ne considérer que les dérivées partielles, c'est-à-dire les dérivées selon les directions données par les axes, on considère les dérivées selon toutes les directions possibles :

Définition 3.7. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a suivant v si l'application $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. La dérivée $\varphi'(0)$ est alors appelée dérivée de f en a suivant v.

Remarque 3.8. Si elle existe, la k-ième dérivée partielle de f au point a n'est autre que la dérivée de f en a suivant e_k.

***Exercice* 3.5.** Calculer la dérivée de l'application $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1,2)$ suivant le vecteur $v = (3,5)$.

Remarque 3.9. Malheureusement cette nouvelle définition ne résoud pas notre problème, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point. Considèrons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées selon tout vecteur en tout point mais n'est pas continue (voir l'exercice 3.15).

3.3 Fonctions différentiables

Définition 3.10. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire d_af de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Autrement dit, il existe une application ε_a définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\varepsilon_a(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \|h\|\,\varepsilon_a(h). \tag{3.2}$$

On écrira parfois $df(a)$ au lieu de $d_a f$.

Remarque 3.11. On rappelle (sinon ce sera vu en approfondissements mathématiques) qu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Cela signifie en particulier que

$$|||d_a(f)||| := \sup_{h \neq 0} \frac{\|d_a f(h)\|}{\|h\|}$$

est bien défini.

Contrairement aux dérivées partielles ou aux dérivées directionnelles, la notion de différentiabilité implique bien la continuité :

Proposition 3.12. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Avec les notations de la définition 3.10 on a pour $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \|d_a f(h)\| + \|h\| \, \|\varepsilon_a(h)\| \leqslant \|h\| \left(|||d_a(f)||| + \|\varepsilon_a(h)\| \right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \qquad \square$$

En fait, la différentiabilité implique aussi l'existence des dérivées dans toutes les directions, et en particulier l'existence de toutes les dérivées partielles :

Proposition 3.13. *Si f est différentiable en a, alors elle est dérivable en a suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $d_a f(v)$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + d_a f(tv) + \|tv\| \, \varepsilon_a(tv) = f(a) + t d_a f(v) + \underset{t \to 0}{o}(t).$$

Cela prouve que l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $d_a f(v)$. $\square$

Exemples 3.14.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $d_a f$ est l'application $h \mapsto hf'(a)$.
- Une application constante est différentiable en tout point de différentielle nulle.
- Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

  $$L(a+h) = L(a) + L(h) + 0.$$

  Ainsi L est différentiable en a de différentielle $d_a L = L$.

Proposition 3.15. *On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Autrement dit :

$$d_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k^*,$$

où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de la base canonique.

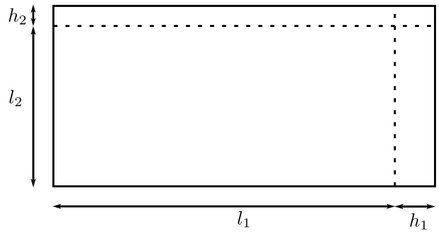
Démonstration. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition 3.13 appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $d_a f$ on a

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^n v_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n v_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a). \qquad \square$$

Proposition 3.16. *On suppose que f et g sont deux fonctions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en a. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

***Exercice* 3.5.** On reprend l'exemple de l'aire d'un rectangle. Pour $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ on note $f(l_1, l_2) = l_1 l_2$. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. Représenter géométriquement chacun des termes apparaissant dans (3.2) (en remplaçant la différentielle par l'expression donnée par la proposition 3.15).



3.4 Plan tangent

On suppose que f est différentiable en a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$g(x) = f(a) + d_a f(x - a)$$

(on note que cette définition a un sens même si f n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}^n$). Alors g est une application affine (une constante + une application linéaire) telle que

$$f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o} \left(\|x - a\| \right).$$

Il n'est pas difficile de voir que g est en fait la seule application affine à avoir cette propriété. L'image de $\mathbb{R}^n$ par l'application g est appelée plan tangent au graphe de f au point a.

Supposons que $n = 2$ et $p = 1$. Alors le graphe de f est une « surface » de $\mathbb{R}^3$, et le plan tangent au graphe de f est véritablement un plan de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan qui est proche du graphe de f quand on « zoome » sur le point $(a, f(a))$ (voir figure 3.1).

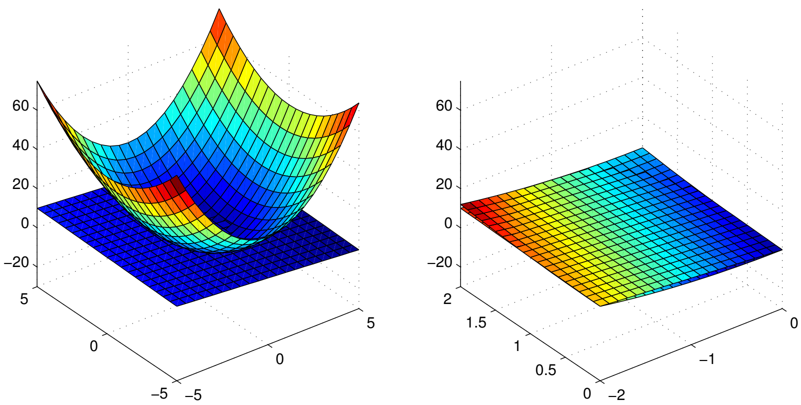


FIGURE 3.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$ et son plan tangent au point (-1,1). *Si on zoome autour du point $(-1, 1, f(-1, 1))$, le graphe et le plan tangent paraissent quasiment confondus.*

***Exercice* 3.6.** On considère l'application $f : (x, y) \mapsto \cos(xy)$. Déterminer le plan tangent au graphe de f au point $(1, 0)$.

3.5 Vecteur gradient

On suppose dans ce paragraphe que $p = 1$, c'est-à-dire que f est à valeurs réelles.

Définition 3.17. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 3.18. *Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle ,$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{j=1}^n u_j v_j$.

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition 3.15. □

Le vecteur gradient indique en chaque point la direction de plus grande pente. Dans la montagne, si vous voulez prendre la pente la plus dure, il faut suivre le gradient de la fonction altitude. Si vous voulez descendre le plus possible, il faut au contraire suivre la direction opposée. Et si vous voulez garder la même altitude, c'est-à-dire rester sur votre ligne de niveau, il faut alors suivre une direction orthogonale. En particulier le vecteur gradient est en tout point orthogonal aux lignes de niveaux (en un sens à préciser...).

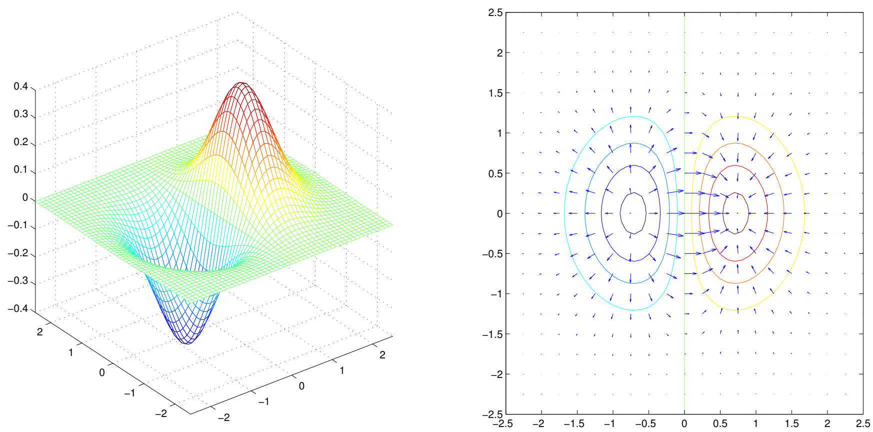


FIGURE 3.2 – Le graphe, les lignes de niveaux, et le gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

***Exercice* 3.7.** Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

3.6 Matrice jacobienne

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit maintenant la matrice jacobienne d'une application différentiable. Il n'y a pas de concept nouveau, on donne simplement un nom à la matrice de la différentielle dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

Définition 3.19. Si f est différentiable en a, alors on appelle matrice jacobienne de f en a et on note $\operatorname{Jac}_a f$ la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$\operatorname{Jac}_a f = \operatorname{Jac} f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple 3.20. Coordonnées polaires : on considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'application $\psi : (r,\theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. Alors ψ est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et sa matrice jacobienne au point $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est

$$\operatorname{Jac}\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le fait que ψ est partout différentiable sera une conséquence du théorème 4.2.

***Exercice* 3.8.** Écrire la matrice jacobienne de l'application $(x,y,z) \mapsto (xyz, x^2y + y)$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.

3.7 Exercices

***Exercice* 3.9.** Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note $f(x,y,z) = \big(2x(y+z^2), \cos(xyz)\big)$.

1. Donner la nature de chacun des objets suivants :

1. f
2. $\operatorname{Jac} f$
3. $\operatorname{Jac} f(1,2,3)$
4. $x \mapsto f(x,5,2)$
5. $d_{(0,0,0)} f$
6. $d_{(1,2,3)} f(1,2,3)$
7. ∇f
8. $x \mapsto \partial_y f(x,2,4)$
9. $\partial_z f$

Par exemple : f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Jac} f$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$ des matrices à deux lignes et trois colonnes, etc. Il est possible que certains objets proposés ne soient pas définis.

2. Expliciter les objets de la quantités précédentes. Par exemple : $\operatorname{Jac} f : (x,y,z) \mapsto \dots$, etc.

Il est très fortement recommandé de toujours commencer par bien s'assurer que les natures des objets qui apparaissent dans un théorème, une démonstration, un exercice, sont bien claires. Est-ce qu'on me demande de calculer un scalaire (un nombre), une fonction (de quoi dans quoi), un vecteur, une matrice, une application linéaire, etc. ?

***Exercice* 3.10** (Existence des dérivées partielles n'implique pas continuité)**.** Montrer que la fonction de la remarque 3.6 admet bien des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, et les expliciter.

***Exercice* 3.11.** On admet pour le moment que les fonctions suivantes sont différentiables. Calculer leurs jacobiennes.

$$f_1 : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \sin(x)\sin(y)\right), \quad f_2 : (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2, \ln\left(1+x^2\right)\right).$$

***Exercice* 3.12.** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x\rangle,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

***Exercice* 3.13.** Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas différentiable en 0.

***Exercice* 3.14.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)| \leqslant \|x\|_2^2 .$$

1. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Interpréter ce résultat géométriquement.
3. Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

***Exercice* 3.15** (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas non plus la continuité)**.**
On considère l'application f de la remarque 3.9.
1. Montrer que f admet en (0,0) une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.