Chapitre 2

Limites et continuité pour une fonction de plusieurs variables

Vous devez repeindre les murs d'une pièce rectangulaire. Vous commencez par mesurer les longueurs des côtés de la pièce et obtenez environ 3m et 4m. La hauteur des murs est de 3m environ. Vous choisissez une peinture qui permet de couvrir 14m² par litre. Vos mesures vous permettent-elles de savoir à peu près le volume de peinture nécessaire à vos travaux ? Un pot d'un litre de peinture est vendu 40 euros. Pouvez-vous dire combien tout cela va-t-il vous coûter ?

La différence entre les deux questions tient à la continuité ou la discontinuité des fonctions qui entrent en jeu...

Dans le chapitre précédent on a introduit les normes, qui jouent dans $\mathbb{R}^n$ le rôle que joue la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Cela nous permet d'introduire maintenant la notion de limite pour une suite de points dans $\mathbb{R}^n$. La définition est exactement de la même que dans $\mathbb{R}$, en remplaçant simplement la valeur absolue par une norme. De la même façon, on pourra ensuite adapter à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ la notion de continuité puis, modulo quelques difficultés supplémentaires, la notion de dérivabilité au chapitre suivant.

2.1 Limites de suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers l et on note

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant N, \quad \|x_m - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit x_m tend vers l si la quantité réelle $\|x_m - l\|$ tend vers 0 au sens usuel.

Sans surprise, on retrouve les mêmes propriétés de base que pour la limite d'une suite réelle :

Proposition 2.2. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

(i) Unicité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, $l_1 \in \mathbb{R}^n$ et $l_2 \in \mathbb{R}^n$. Si $x_m \to l_1$ et $x_m \to l_2$ quand m tend vers $+\infty$, alors $l_1 = l_2$.*

(ii) Linéarité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si*

$$x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_1 \quad \textit{et} \quad y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_2,$$

alors

$$\lambda x_m + \mu y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

***Exercice* 2.1.** Démontrer la proposition 2.2 (ou au moins l'une des deux propriétés, la démonstration étant la même que pour les limites dans $\mathbb{R}$).

La définition de la limite d'une suite dépend du choix d'une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étant données deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^n$, il se peut a priori que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l pour la norme N_1 mais pas pour la norme N_2. Heureusement, cela ne peut pas se produire si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, et on a dit que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes. Ouf !

Proposition 2.3. *Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$N_1(x_m - l) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \iff \quad N_2(x_m - l) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$.

Définition 2.4. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall j, k \geqslant N, \quad \|x_j - x_k\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 2.5. *$\mathbb{R}^n$ est complet. Cela signifie que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ est convergente.*

Démonstration. Voir le cours d'approfondissements mathématiques. □

Définition 2.6. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points qui sont limites d'une suite d'éléments de A.

Exemples 2.7.
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B(x,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(x,r)$.
- L'adhérence de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est $\mathbb{R}^2$.

2.2 Limite d'une fonction de plusieurs variables

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathbb{R}^p$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$. Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.8. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \delta \implies \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^p} \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 2.9. Comme pour la limite d'une suite, la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$, qui sont des espaces de dimensions finies. Dans la suite on notera simplement $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ ou $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$. Cela n'amènera pas d'ambiguïté, mais attention tout de même à ne pas s'y perdre !

Proposition 2.10. *Soit $f = (f_1, \dots, f_p)$ une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (avec $f_1, \dots, f_p$ des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $l = (l_1, \dots, l_p)$. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}}$. Alors f tend vers l quand x tend vers a si et seulement si f_j tend vers l_j quand x tend vers a pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.*

Puisque la notion de limite ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathbb{R}^p$, on peut supposer que $\mathbb{R}^p$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour démontrer cette proposition.

L'intérêt de cette proposition est qu'il suffit de s'intéresser à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par contre on ne peut pas se ramener au cas de fonctions d'une seule variables...

Les propriétés de base pour les limites de fonctions de plusieurs variables sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable réelle. Les trois propositions suivantes se montrent en recopiant simplement les démonstrations valable pour $n = 1$ en changeant les valeurs absolues en normes. Elles sont laissées en exercice.

Proposition 2.11. *Soient f, g deux fonctions d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_1 et l_2 quand x tend vers a. Alors*

$$(f + \lambda g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 + \lambda l_2$$

et

$$(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 l_2.$$

En outre, si $l_1 = 0$ et g est bornée au voisinage de a, alors on a

$$(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Enfin, si $l_1 \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{l_1}.$$

⚠ La première propriété pourrait directement être écrite pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, tandis que les deux suivantes de sens que si l'une des deux fonctions au moins est à valeurs réelles. De même, la dernière propriété n'a de sens que si f est à valeurs réelles.

Proposition 2.12. *Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}}$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite $l \in \mathbb{R}^p$ quand x tend vers a. Soit g une fonction d'un domaine $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que $l \in \overline{\mathcal{D}'}$ et que $g(y)$ tend vers une limite $l' \in \mathbb{R}$ quand y tend vers l. Alors $g(f(x))$ tend vers l' quand x tend vers a.*

On énonce maintenant le critère séquentiel pour la continuité en un point :

Proposition 2.13. *Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soient $a \in \overline{\mathcal{D}}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Alors f tend vers l quand x tend vers a si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a (dans $\mathbb{R}^n$) la suite $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers l (dans $\mathbb{R}^p$).*

Comme pour une fonction d'une variable réelle, cette propriété sert en général à montrer que l n'est pas la limite de f en a. C'est en particulier très utile pour montrer que f n'admet en fait aucune limite en a.

Exemple 2.14. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(voir figure 2.2). On montre que f n'admet pas de limite en (0,0). Pour cela, on suppose par l'absurde que f tend vers une limite $l \in \mathbb{R}$ en (0,0). Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

On a

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} (0, 0) \quad \text{et} \quad f(u_n) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

donc d'après la proposition 2.13 on a nécessairement $l = 0$. D'autre part on a

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f(v_n) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc on a aussi $l = \frac{1}{2}$. D'où la contradiction. Cela prouve que f n'admet pas de limite en (0,0).

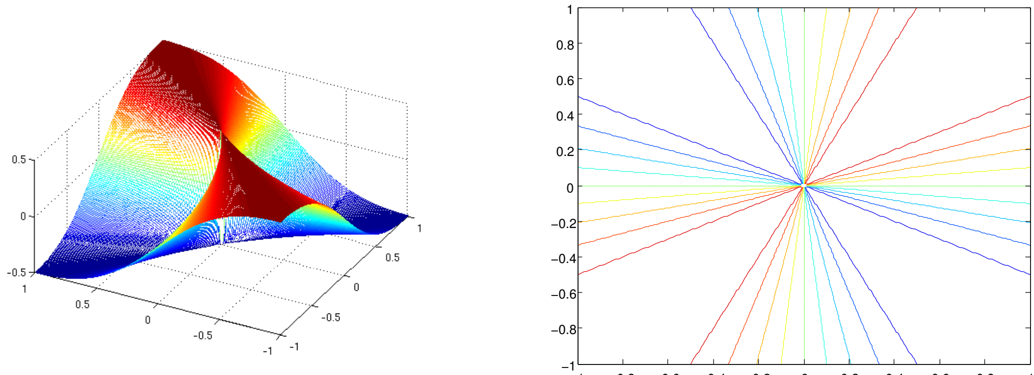

FIGURE 2.1 – Graphe et lignes de niveaux pour le contre-exemple 2.14 : sur tout voisinage de (0,0) on trouve toutes les valeurs entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; en particulier f n'admet pas de limite en (0,0).

Pour montrer l'existence d'une limite on peut, en plus des propriétés de bases des propositions 2.11 et 2.12, utiliser le résultat suivant :

Proposition 2.15. *Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $a = (a_1, a_2) \in \overline{\mathcal{D}}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tous $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiants $(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathcal{D}$ on a*

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r).$$

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\|(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - (a_1, a_2)\|_2 = r.$$

On suppose que f tend vers l en a. Pour $r \geqslant 0$ on note

$$\varepsilon(r) = \sup_{\substack{\theta\in\mathbb{R} \\ (r\cos(\theta), r\sin(\theta))\in\mathcal{D}}} |f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \geqslant 0$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ si $x \in \mathcal{D}$ et $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$, donc $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Cela prouve que $\varepsilon(r) \to 0$ quand $r \to 0$. Inversement, supposons qu'une telle fonction ε existe. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Soit alors $x \in \mathcal{D}$ tel que $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$. Alors il existe $r \in [0, \delta]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = (a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin(\theta))$. On a alors

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0.$$

Cela prouve que f est continue en a. □

Exemple 2.16. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = \frac{r^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2}{r^2} \leqslant r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f tend vers 0 en (0,0).

2.3 Continuité d'une fonction de plusieurs variables

Maintenant que l'on a défini la notion de limite, les définitions de continuité pour une fonction de plusieurs variables sont sans surprise.

Définition 2.17. Soit $a \in \mathcal{D}$.

(i) On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

(ii) On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

***Exercice* 2.2.** **1.** Montrer qu'une fonction constante est continue.
2. Montrer que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Les propriétés de bases sur les limites se traduisent automatiquement en propriétés sur les fonctions continues. Ainsi la somme de deux fonctions continues est continues, le produit de deux fonctions continues (dont l'une au moins est à valeurs réelles) est continue, l'inverse d'une fonction continue à valeurs réelles non nulles est continue et la composée de fonctions continues est continue.

Définition 2.18. On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ une application qui s'écrit comme une somme de termes qui sont eux-mêmes des produits de fonctions coordonnées, autrement dit une fonction de la forme

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{N} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in \mathbb{R}$ pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [\![0, N]\!]$. Par exemples les fonctions $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^4 + x_1^3 x_2^2$ ou $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3^2$sont polynômiales. Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Proposition 2.19. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Plus généralement toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est bien définie et continue sur ce domaine.*

Les propositions 2.13 et 2.15 sont très utiles pour montrer qu'une fonction est ou n'est pas continue en un point :

Exemple 2.20. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(voir figure 2.2). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part on a

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, y) = 0 \xrightarrow[y \to 0]{} 0 = f(0, 0),$$

et pourtant f n'est pas continue en (0,0). En effet on a vu que f n'admet pas de limite en (0,0). En particulier elle ne tend pas vers $f(0, 0)$.

⚠ C'est une erreur trop fréquente que de se contenter de vérifier la continuité des fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour prouver la continuité de f. On voit bien sur cet exemple que ce n'est malheureusement pas suffisant...

Exemple 2.21. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre on a vu que f tend vers $0 = f(0,0)$ en $(0,0)$, donc f est continue en (0,0). Cela prouve que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

La proposition suivante généralise le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes :

Proposition 2.22. *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Corollaire 2.23. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Un résultat central pour les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est que l'image d'un intervalle est un intervalle. La notion d'intervalle étant propre à la dimension 1, on ne peut pas transposer directement cet énoncé en dimension quelconque. Ceci dit, et même si cela dépasse le cadre de ce cours, il est tout de même intéressant de se demander comment le théorème des valeurs intermédiaire pourrait être généralisé à notre contexte... (voir déjà l'exercice 2.8).

2.4 Exercices

***Exercice* 2.3.** Pour $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1 + e^{-m} \right)$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

***Exercice* 2.4.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$
$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

***Exercice* 2.5.** Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad ?$$

***Exercice* 2.6.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

***Exercice* 2.7.** Montrer les propositions 3.16, 2.12 et 2.13.

***Exercice* 2.8.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié : si les réels a et b sont dans l'image de f alors tous les réels entre a et b le sont également. Autrement dit, l'image de f est un intervalle de f. Question subsidiaire (dont la réponse sera donnée dans le cours d'approfondissement mathématiques) : dans quelle mesure ce résultat se généralise au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et son domaine n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^n$ tout entier ?