

# Chapitre 14

## Vers le théorème de Stokes

Le but de ce chapitre est de voir comment les résultats des chapitres 11 et 12 peuvent être généralisés à des problèmes en dimension supérieure. En particulier on aura à intégrer sur des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$ , typiquement des courbes ou des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ .

On a vu au chapitre 12 la formule de Green-Riemann, qui est un analogue du théorème fondamental de l'analyse pour la dimension 2. On rappelle que dans tous les cas il s'agit d'exprimer une intégrale sur un domaine en fonction d'une intégrale sur le bord de ce domaine. La version générale est le théorème de Stokes, qu'on énonce dès maintenant :

**Théorème 14.1** (Théorème de Stokes). *Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  à bord, compacte, orientée, de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$  (et de classe  $C^2$ ). On munit le bord  $\partial M$  de l'orientation induite par l'orientation de  $M$ . Soit  $\omega$  une forme différentielle de degré  $p-1$  et de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $M$ . Alors on a*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

L'objectif principal de ce chapitre est d'avoir au moins une vague idée de ce que signifie ce théorème. En effet, ce résultat est utilisé assez tôt dans les cours de physique, alors qu'il utilise des outils mathématiques sophistiqués. On n'entrera pas ici dans les détails, et en particulier on ne donnera aucune démonstration. Le but est pour le moment de se convaincre que ce théorème a un sens, qu'il est crédible, et d'avoir une petite idée d'où il vient. Les plus curieux pourront par exemple trouver une présentation détaillée dans [Ramis-Warusfel-Moulin, Cours de mathématiques pures et appliquées, Volume 1 : algèbre et géométrie, p.892-942].

### 14.1 Formes $p$ -linéaires alternées

On a vu au chapitre 11 que sur une courbe on n'intègre non pas une fonction mais une forme différentielle de degré 1, une forme différentielle de degré 1 étant une application qui à chaque point associe une forme linéaire. De même on a vu que l'intégrale usuelle sur un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , peut-être vu comme l'intégrale d'une 2-forme différentielle, c'est-à-dire d'une application qui à chaque point du domaine associe une forme bilinéaire bien particulière.

De façon générale, sur une sous-variété de dimension  $p$  on pourra intégrer une  $p$ -forme différentielle, et une  $p$ -forme différentielle sera une application qui à chaque point associe une forme  $p$ -linéaire alternée, objet que l'on introduit maintenant.

**Définition 14.2.** On appelle forme  $p$ -linéaire alternée une application  $\varphi : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- Pour tous  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$  l'application

$$u_k \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_k, \dots, u_p)$$

est linéaire.

- Pour tous  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$  et  $j < k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a

$$\varphi(u_1, \dots, u_{j-1}, u_k, u_{j+1}, \dots, u_{k-1}, u_j, u_{k+1}, \dots, u_p) = -\varphi(u_1, \dots, u_p).$$

On note  $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des formes  $p$ -linéaires alternées.

Autrement dit une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$  est une application à  $p$  variables dans  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , linéaire en chacune de ces variables (forme  $p$ -linéaire...) et telle qu'on change le signe de l'image si on permute deux variables (...alternée). Cette dernière propriété a quelques conséquences immédiates, qu'on l'on pourra démontrer en guise d'exercice :

**Proposition 14.3.** Soit  $\varphi$  une forme  $p$ -linéaire alternée et  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$ .

- S'il existe  $j \neq k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tels que  $u_j = u_k$  alors  $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$ .
- Si la famille  $u_1, \dots, u_p$  est liée, alors  $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$ .
- Si  $p > n$ , alors la seule forme  $p$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$  est l'application nulle de  $(\mathbb{R}^n)^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Exemples 14.4.* • L'espace des formes 0-linéaires alternées peut-être identifié à  $\mathbb{R}$ .

- Les formes 1-linéaires alternées sont les formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Pour  $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  l'application

$$dx_j \wedge dx_k : (u, v) \mapsto dx_j(u)dx_k(v) - dx_k(u)dx_j(v) = u_j v_k - u_k v_j = \begin{vmatrix} u_j & v_j \\ u_k & v_k \end{vmatrix}$$

est une forme 2-linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$ .

- Pour  $j_1, \dots, j_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  l'application

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} : (u^1, \dots, u^p) \mapsto \begin{vmatrix} u_{j_1}^1 & \dots & u_{j_1}^p \\ \vdots & & \vdots \\ u_{j_p}^1 & \dots & u_{j_p}^p \end{vmatrix} \quad (14.1)$$

est une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$ . En particulier le déterminant usuel n'est autre que  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

- On rappelle que si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formes linéaires alors

$$\varphi \wedge \psi : (u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$$

définit une forme 2-linéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$ .

On peut préciser les propriétés des formes  $p$ -linéaires alternées du type (14.1) :

**Proposition 14.5.** Soient  $j_1, \dots, j_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- Si les  $j_1, \dots, j_p$  ne sont pas deux à deux distincts alors la forme  $p$ -linéaire alternée  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$  est nulle.
- Pour  $k < l \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}} \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{j_{l-1}} \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{j_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} = -dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}.$$

Les formes (14.1) sont très importantes puisqu'elles forment une base de l'espace  $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ . En particulier lorsqu'on veut montrer une propriété sur les formes  $p$ -linéaires alternées on le montre sur ces formes particulières et, lorsque c'est possible, on conclut simplement par linéarité.

**Proposition 14.6.** Toute forme  $p$ -linéaire alternée  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^n$  est de la forme

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1, \dots, j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$

où les coefficients  $a_{j_1, \dots, j_p}$  sont réels. Plus précisément on a

$$a_{j_1, \dots, j_p} = \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}).$$

**Exercice 14.1.** Soient  $u = (0, 1, 3, -1)$ ,  $v = (2, 2, 2, -1)$  et  $w = (1, 0, 1, -1)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Calculer  $\varphi(u, v)$  pour  $\varphi_1 = dx_2 \wedge dx_4$ ,  $\varphi_2 = dx_4 \wedge dx_2$  et  $\varphi_3 = 2 dx_2 \wedge dx_4 - dx_1 \wedge dx_2 + 4 dx_3 \wedge dx_2 + dx_4 \wedge dx_4$ .
2. Calculer  $\varphi(u, v, w)$  pour  $\varphi = dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$ .

## 14.2 Formes différentielles

On peut maintenant introduire les formes différentielles :

**Définition 14.7.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle  $p$ -forme différentielle de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{U}$  une application de classe  $C^k$  de  $\mathcal{U}$  dans  $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ .

Une  $p$ -forme différentielle de classe  $C^k$  s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} a_{k_1, \dots, k_p}(x) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p},$$

où les fonctions  $a_{k_1, \dots, k_p} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^k$ .

- Exemples 14.8.* • Les 0-formes différentielles de classe  $C^k$  sont les fonctions de classe  $C^k$ .  
 • Les 1-formes différentielles correspondent bien aux formes différentielles vues au chapitre 11. En particulier si  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  est un champ de vecteur de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{U}$  on note pour  $x \in \mathcal{U}$

$$W_\xi(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) dx_j : v \mapsto \langle \xi(x), v \rangle.$$

Ainsi  $W_\xi$  est une 1-forme différentielle de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{U}$ . C'est le **travail** du champ de vecteur  $\xi$ . Inversement toute 1-forme différentielle  $\omega$  sur  $\mathcal{U}$  est de cette forme. En effet si  $\omega$  s'écrit  $\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$ , alors on a  $\omega = W_\xi$  avec  $\xi(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

- Pour  $x \in \mathcal{U}$  et  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  on note maintenant

$$\Phi_\xi(x; v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(\xi(x), v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Cela définit une  $(n-1)$ -forme différentielle de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{U}$ . Pour  $n = 3$ ,  $\Phi_\xi(x; u_1, u_2)$  est le **flux** de  $\xi(x)$  à travers le parallélogramme orienté basé sur  $u_1$  et  $u_2$ . Inversement toute  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit de cette façon (le vérifier...).

- Soit  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^k$ . Alors l'application  $M_f = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f \det$  est une  $n$ -forme différentielle de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{U}$ .  $f$  peut alors être vue comme une **densité**. En outre toutes les  $n$ -formes différentielles sur  $\mathcal{U}$  sont de cette forme.

**Définition 14.9.** Soit  $\omega$  une  $p$ -forme différentielle sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^m$ , et  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  une application de classe  $C^{k+1}$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors la  $p$ -forme différentielle  $\varphi^* \omega$  (tiré en arrière de  $\omega$  par  $\varphi$ ) est définie sur  $\mathcal{U}$  par

$$\varphi^* \omega(x; u_1, \dots, u_p) := \omega(\varphi(x); d_x \varphi(u_1), \dots, d_x \varphi(u_p)).$$

### 14.3 Intégration d'une forme différentielle sur une $p$ -courbe

De même qu'on a pu intégrer des 1-formes sur des courbes, on va maintenant définir l'intégrale d'une 2-forme sur une surface, et plus généralement d'une  $p$ -forme sur une  $p$ -courbe.

Pour les intégrales curvilignes l'idée était d'utiliser un paramétrage du chemin considéré pour se ramener à une intégrale sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Pour une surface on va se ramener de la même façon à une intégrale sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et l'intégrale d'une  $p$ -courbe sera obtenue en calculant une intégrale sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

**Définition 14.10.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle  $p$ -courbe de  $\mathcal{U}$  une application injective  $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$  telle que  $d_y \gamma$  est de rang  $p$  pour tout  $y \in \mathcal{W}$ . L'image  $\gamma(\mathcal{W})$  d'une  $p$ -courbe est appelée support de cette courbe.

Une 0-courbe de  $\mathbb{R}^n$  s'identifie à un point de  $\mathbb{R}^n$ , une 1-courbe est une courbe paramétrée, une 2-courbe est une nappe paramétrée.

**Définition 14.11.** Soit

$$\omega(x) = \alpha(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

une forme différentielle continue sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^p$ . Alors on note

$$\int_{\mathcal{W}} \omega = \int_{\mathcal{W}} \alpha(x) dx_1 \dots dx_p.$$

Ainsi l'intégrale d'une  $p$ -forme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  n'est rien de plus que l'intégrale au sens usuel. On peut maintenant se ramener à ce cas pour intégrer sur une surface de dimension  $p$  en utilisant un paramétrage et le tiré en arrière correspondant de notre  $p$ -forme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  :

**Définition 14.12.** Soient  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts,  $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  une  $p$ -courbe et  $\omega$  une  $p$ -forme différentielle continue sur  $\mathcal{U}$ . Alors on pose

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\mathcal{W}} \gamma^* \omega.$$

*Remarque 14.13.* Si  $\omega$  est une 1-forme sur  $\mathcal{U}$  et  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathcal{U}$  est une courbe paramétrée, on retrouve bien la définition

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

Dans ce paragraphe comme dans tout ce qui suit on passe sous silence les problèmes d'intégrabilité liés au fait qu'on peut se retrouver avec des intégrales généralisées.

Malheureusement les choses ne sont pas si « simples », puisque toutes les sous-variétés sur lesquelles on voudra intégrer se peuvent pas forcément être vues comme le support d'une  $p$ -courbe. Par exemple on ne va pas pouvoir intégrer sur une sphère avec cette définition. Par contre on va pouvoir intégrer sur des « morceaux » de sphère, par exemple sur des demi-sphères. L'idée va alors être plus ou moins d'intégrer sur des morceaux et de sommer les résultats. Mais pour faire ça il y a encore un certain nombre de subtilités.

### 14.4 Sous-variétés orientées

On a vu pour les intégrales curvilignes que l'intégrale d'une 1-forme le long d'un chemin ne dépend pas de la façon de parcourir ce chemin. Par contre on change le signe de l'intégrale si on change le sens de parcours. C'était déjà le cas pour une intégrale sur un segment de  $\mathbb{R}$ . L'intégrale de  $b$  à  $a$  est l'opposée de l'intégrale de  $a$  à  $b$ . Comme on peut s'y attendre, on aura le même genre de problème en intégrant sur une  $p$ -courbe, mais le « sens de parcours »

n'a plus vraiment de sens.

Revenons sur le cas d'une intégrale curviligne, et plus précisément sur la proposition 11.12, dont on reprend les notations. Pour déterminer si les intégrales le long de  $\gamma$  et de  $\tilde{\gamma}$  ont même signe, on regarde si le difféomorphisme  $\phi$  qui permet de passer de l'un à l'autre est croissant ou décroissant. Cela n'est pas transposable en dimension supérieure.

Supposons maintenant que les dérivées  $\gamma'$  et  $\tilde{\gamma}'$  ne s'annule jamais (on n'a pas fait cette hypothèse pour le chapitre 11 mais on la fait à la définition 14.10). On considère  $x$  sur le support commun à  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$ , puis  $t \in [a, b]$  et  $s \in [c, d]$  tels que  $\gamma(t) = x = \tilde{\gamma}(s)$  (en fait on a  $t = \phi(s)$ ). Alors les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\tilde{\gamma}'(s)$  sont des vecteurs colinéaires dans  $\mathbb{R}^n$  (ce sont des vecteurs directeurs de la tangente au support, on le voit également en écrivant  $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(t)\phi'(s)$ ). Si  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont parcourus dans le même sens, les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\tilde{\gamma}'(s)$  sont positivement colinéaires (cela correspond au cas  $\phi'(s) > 0$ ) tandis que si  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont parcourus dans le sens contraire, les vecteurs  $\gamma'(t)$  et  $\tilde{\gamma}'(s)$  sont négativement colinéaires (cela correspond au cas  $\phi'(s) < 0$ ). Autrement dit le signe de la quantité

$$\langle \gamma'(t), \tilde{\gamma}'(s) \rangle$$

nous indique si les intégrales le long de  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  ont même signe ou des signes contraires. On remarque que ce signe ne dépend pas du point  $x$  choisi sur le support puisque c'est une fonction continue qui ne s'annule pas.

En dimension supérieure l'idée est la même. On considère  $\gamma : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\tilde{\gamma} : \tilde{\mathcal{W}} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux  $p$ -courbes qui ont même support  $\Gamma$ , puis  $x \in \Gamma$ , et enfin  $a \in \mathcal{W}$  et  $b \in \tilde{\mathcal{W}}$  tels que  $\gamma(a) = x = \tilde{\gamma}(b)$ . On note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . Alors les familles

$$\mathcal{B}(x) = (d_a\gamma(e_1), \dots, d_a\gamma(e_p)) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}}(x) = (d_b\tilde{\gamma}(e_1), \dots, d_b\tilde{\gamma}(e_p))$$

sont deux bases du plan tangent à  $\Gamma$  au point  $x$ . Comment généraliser l'idée que ces deux bases « sont dans le même sens » ? La quantité que l'on va regarder est le déterminant d'une base par rapport à l'autre base

$$\det_{\mathcal{B}(x)}(\tilde{\mathcal{B}}(x)).$$

Cette quantité est de signe constant (sur un connexe...) car elle est continue et ne s'annule pas. Et les intégrales le long de  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  auront même signe si ce déterminant est positif, et seront opposées s'il est négatif.

Ce n'est pas fini...

Plutôt que de comparer les orientations de deux  $p$ -courbes qui ont même support  $\Gamma$ , on peut fixer à l'avance une orientation sur  $\Gamma$ , et comparer l'orientation de chaque  $p$ -courbe de support  $\Gamma$  à cette orientation. Cela revient à se donner d'avance une famille de bases  $\mathcal{B}(x)$  et de comparer la base  $\tilde{\mathcal{B}}(x)$  obtenue comme précédemment à cette base de référence. Si on fixe à l'avance un sens de parcours positif sur une courbe  $\Gamma$  de dimension 1, pour chaque courbe paramétrée de support  $\Gamma$  on pourra dire qu'elle va dans le sens positif ou dans le sens négatif. Si on regarde le flux, d'un liquide par exemple, à travers une surface, on pourra choisir de compter positivement le flux dans un sens et donc négativement dans l'autre sens. C'est un choix arbitraire.

Pourquoi doit-on faire ça ? On a dit que pour intégrer sur une sous-variété  $M$ , on allait sommer les intégrales sur des  $p$ -courbes dont les supports sont des morceaux de  $M$ . On aura besoin que les orientations de ces  $p$ -courbes soient compatibles, et pour s'en assurer on va les comparer à une orientation définie globalement sur  $M$  tout entier. Le problème est qu'il n'est pas possible de définir globalement une orientation sur n'importe quelle sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque c'est le cas, on dira que  $M$  est orientable :

**Définition 14.14.** On appelle orientation d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$  une application  $\nu$  de l'ensemble des bases de  $E$  vers  $\{-1, +1\}$  telle que  $\nu(\mathcal{B}) = \nu(\tilde{\mathcal{B}})$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{B}}) > 0$ .

**Définition 14.15.** Une sous-variété  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite orientable s'il existe une application  $\nu$  qui à tout  $a \in M$  associe une orientation  $\nu(a)$  de l'espace tangent  $T_a M$  de sorte que  $\nu(a)$  dépende continuellement de  $a$ . Cela signifie que pour tout paramétrage local  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  avec  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$  et  $a \in \mathcal{U} \subset M$  le signe de

$$\nu(a; d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(e_1), \dots, d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(e_p))$$

ne dépend pas de  $a$ .

Si  $M$  est de dimension 1, choisir une orientation revient à choisir pour tout  $a \in M$  un vecteur  $\tau(a) \in T_a M \setminus \{0\}$  qui dépend continuellement de  $a$ . En termes vulgaires, le vecteur  $\tau(a)$  montre le sens de parcours positif.

Si  $M$  est de dimension  $n - 1$ , choisir une orientation revient à choisir pour tout  $a \in M$  un vecteur  $N(a) \in T_a \mathbb{R}^n \setminus T_a M$  qui dépend continuellement de  $a$ . Toujours en termes vulgaires, le vecteur  $N(a)$  montre le sens du flux qui sera considéré comme positif.

Un exemple célèbre de surface non-orientable dans  $\mathbb{R}^3$  est le ruban de Möbius. Il n'est pas possible de donner un sens au flux traversant sa surface...

## 14.5 Sous-variétés à bords

On introduit maintenant les sous-variétés à bords. C'est comme les sous-variétés, mais on autorise un bord :

**Définition 14.16.** Un ensemble  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété à bord de dimension  $p$  si pour tout  $a \in M$  il existe un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $\varphi$  entre un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $a$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(a) = 0$  et

- soit  $\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$ ,
- soit  $\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V} \mid y_1 \leq 0 \text{ et } y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$ .

Un tel difféomorphisme est une coordonnée rectifiant  $M$  en  $a$ . Le bord de  $M$ , noté  $\partial M$  est l'ensemble des points  $a$  de  $M$  vérifiant la deuxième condition.

On a dit qu'une sous-variété de dimension  $p$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  telle que si on zoome sur un de ses points on a de plus en plus l'impression qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension  $p$ . C'est encore le cas pour certains points d'une sous-variétés à bord. Pour d'autres points on a l'impression en zoomant d'être à la frontière d'un « demi-sous-espace » de dimension  $p$ . Ce sont les points du bord.

*Remarque 14.17.* Une sous-variété peut-être vue comme une sous-variété à bord de bord vide. Si  $M$  est une sous-variété à bord, alors  $M \setminus \partial M$  est une sous-variété.

**Proposition 14.18.** *Le bord d'une sous-variété à bord de dimension  $p$  est une sous-variété de dimension  $p - 1$ .*

**Proposition 14.19.** *Si  $M$  est une sous-variété à bord de  $\mathbb{R}^n$  orientable (même définition que pour une sous-variété sans bord), alors  $\partial M$  est une sous-variété orientable de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition 14.20.** Si  $M$  est orientée par  $\nu$ ,  $a \in \partial M$  et  $\varphi$  est une coordonnée rectifiant  $M$  en  $a$ , alors l'orientation  $\nu_{\partial}$  de  $\partial M$  est définie par

$$\nu_{\partial}(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_2), \dots, (d_a\varphi)^{-1}(e_p)) = \nu(a; \underbrace{(d_a\varphi)^{-1}(e_1)}_{v_{ext}}, \dots, (d_a\varphi)^{-1}(e_p)).$$

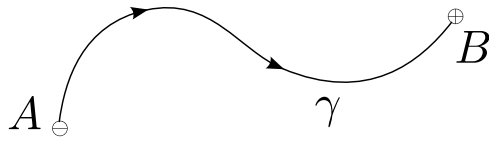


FIGURE 14.1 – Orientation du bord d’une sous-variété orientée.

Ainsi le bord d’une sous-variété orientée  $M$  à bord de dimension  $p$  est une sous-variété orientée de dimension  $p - 1$ . Cela nous autorise à intégrer des  $(p - 1)$ -formes différentielles, et donne du sens au terme de gauche dans le théorème de Stokes.

Dans le cas d’une courbe  $\gamma$  comme à la figure 12.2, le support de  $\gamma$  est une sous-variété à bord de dimension 1, et son bord est un ensemble discret de points, soit une sous-variété de dimension 0. Orientée. Positivement pour le point d’arrivée et négativement pour le point de départ. L’intégrale d’une fonction sur un ensemble de point est simplement la somme des valeurs de  $f$  en ces points, comptées positivement pour les points orientés positivement et négativement pour les points orientés négativement. Cela permet de voir le théorème de Stokes comme une généralisation de la proposition 11.16.

### 14.6 Dérivée extérieure

Pour comprendre maintenant le terme de droite on va maintenant définir la dérivée d’une forme différentielle. La définition suivante ne nous sera pas utile mais elle permet de voir que la notion de dérivée extérieure généralise bien la définition de la dérivée d’une fonction

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + o_{h \rightarrow 0}(h),$$

où on reconnait bien que le membre de gauche est l’intégrale de  $f$  sur le bord (orienté) du segment  $[a, a + h] \dots$

**Définition 14.21.** On dit qu’une  $p$ -forme différentielle  $\omega$  est dérivable sur  $\mathcal{U}$  s’il existe une  $(p + 1)$ -forme différentielle notée  $d\omega$  sur  $\mathcal{U}$  telle que pour tout  $a \in \mathcal{U}$  on a

$$\int_{\partial P_a^+(u_1, \dots, u_{p+1})} \omega = d\omega(a; u_1, \dots, u_{p+1}) + o_{(u_1, \dots, u_{p+1}) \rightarrow (0, \dots, 0)}(\|u_1\|, \dots, \|u_{p+1}\|),$$

où  $P_a^+(u_1, \dots, u_{p+1})$  est la «  $p$ -courbe »  $(t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^p \rightarrow a + \sum_{j=1}^p t_j u_j \in \mathbb{R}^n$ , munie de l’orientation  $\nu_+$  telle que  $\nu_+(u_1, \dots, u_p) = 1$ .

Voir [RWM] pour une définition plus rigoureuse. En réalité on ne travaillera qu’en utilisant les propriétés suivantes (en générale prises directement comme définition de la dérivée extérieure) :

**Proposition 14.22.** • si  $\omega$  est une forme différentielle de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$  alors  $\omega$  est dérivable sur  $\mathcal{U}$ .

- Si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$  (ie. une 0-forme différentielle), alors

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

- Si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$  et si  $\omega_0$  est une forme différentielle constante sur  $\mathcal{U}$ , alors

$$d(f \wedge \omega_0) = (df) \wedge \omega_0.$$

- Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux formes différentielles dérivables de degré  $p$  alors  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ .

*Exemple 14.23.* Au chapitre 12 on avait donné directement une expression pour  $d\omega$  dans le cas où  $\omega$  est une 1-forme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On vérifie que cela correspond bien à la dérivée extérieure de  $\omega$ . Soient donc  $P$  et  $Q$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  et

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Alors  $\omega$  est dérivable et

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

On peut alors généraliser les notions de formes fermées, exactes, et le théorème de Poincaré vues aux chapitres 11 et 12.

**Définition 14.24.** Une  $p$ -forme différentielle  $\omega$  est dite fermée si  $d\omega = 0$ , et exacte s'il existe une  $(p-1)$ -forme différentielle  $\eta$  telle que  $d\eta = \omega$ .

*Remarque 14.25.* Une forme différentielle exacte est fermée. Autrement dit, pour toute forme différentielle  $\eta$  on a  $d^2\eta = d(d\eta) = 0$ .

**Théorème 14.26** (Poincaré). *Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ , alors toute forme différentielle fermée de classe  $C^1$  est exacte.*

## 14.7 Gradient, divergence et rotationnel

En guise d'exemples pour le paragraphe précédent, et en vue des cas particuliers du théorème de Stokes qu'on donnera au paragraphe suivant, on (re)définit maintenant dans  $\mathbb{R}^3$  le gradient, la divergence et le rotationnel, opérateurs différentiels qui apparaissent naturellement dans bon nombre d'applications. Les deux premiers se généralisent directement à des dimensions différentes de 3.

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteur de classe  $C^1$ .

**Définition 14.27.** Le gradient de  $f$ , la divergence de  $\xi$  et le rotationnel de  $\xi$  sont définis sur  $\mathcal{U}$  par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \\ \text{div } \xi &= \nabla \cdot \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}, \\ \overrightarrow{\text{rot}} \xi &= \nabla \times \xi = \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

$\nabla f$  et  $\nabla \times \xi$  définissent des champs de vecteurs sur  $\mathcal{U}$ , tandis que  $\text{div } \xi$  est une fonction sur  $\mathcal{U}$ .

La divergence d'un champ de vecteur mesure la variation du volume sous l'action du champ de ce flot. Par exemple imaginons un fluide tel qu'à l'instant  $t$  la particule qui se trouve au point  $x$  se déplace à une vitesse  $\xi(x)$ . Alors les particules auront tendance à s'éloigner les unes des autres (et donc à occuper chacune plus de volume) là où  $\text{div } \xi > 0$ , et elles auront



tendance à se rapprocher les unes des autres (et donc à occuper chacune moins de volume) là où  $\operatorname{div} \xi < 0$ . La divergence est d'autant plus grande que les particules s'éloignent.

Le rotationnel d'un champ de vecteur indique en chaque point l'axe autour duquel le champ de vecteur a tendance à tourner. La norme du vecteur rotationnel correspond à la vitesse de rotation, son sens indique le sens de la rotation.

**Exercice 14.2.** Dessiner les champs de vecteurs suivants, puis calculer leurs divergences et rotationnels :

$$\xi : (x, y, z) \mapsto (1, 0, 0), \quad \delta : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0), \quad \tilde{\delta} : (x, y, z) \mapsto (x, -y, 0), \quad \rho : (x, y, z) \mapsto (-y, x, 0).$$

**Proposition 14.28.** En reprenant les notations données aux exemples 14.8 pour le travail, le flux et la densité, on a

$$df = W_{\nabla f}, \quad dW_{\xi} = \Phi_{\operatorname{rot} \xi}, \quad \text{et} \quad d\Phi_{\xi} = M_{\operatorname{div} \xi}.$$

**Exercice 14.3.** Démontrer la proposition 14.28

## 14.8 Théorème de Stokes : idée de démonstration

On ne donnera pas une démonstration complète du théorème de Stokes. On peut tout de même le prouver pour le cas particulier du pavé, sur lequel repose la démonstration du cas général :

**Lemme.** Soit  $\omega$  une  $(p-1)$ -forme différentielle de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $P = [0, 1]^p$ . Alors on a

$$\int_{\partial P} \omega = \int_P d\omega,$$

où  $P$  est muni de l'orientation définie par  $\nu(e_1, \dots, e_p) = +1$  et les faces de  $\partial P$  sont munies de l'orientation induite.

*Remarque 14.29.* Pour  $p \geq 2$ ,  $P$  n'est pas une sous-variété à bord.

*Démonstration.* Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour une  $(p-1)$ -forme différentielle de la forme

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_p,$$

où  $f$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $P$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Dans ce cas  $\omega$  est nulle sur toutes les faces de  $P$  sauf celles dirigées par  $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_p)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} \omega &= (-1)^{j-1} \left( \int_{[0,1]^{p-1}} f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_{p-1}) dt_1 \dots dt_{p-1} \right. \\ &\quad \left. - \int_{[0,1]^{p-1}} f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-1}) dt_1 \dots dt_{p-1} \right) \\ &= (-1)^{j-1} \int_{[0,1]^{p-1}} (f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_{p-1}) \\ &\quad - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-1})) dt_1 \dots dt_{p-1} \\ &= (-1)^{j-1} \int_{[0,1]^{p-1}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_j, \dots, t_{p-1}) dt \right) dt_1 \dots dt_{p-1}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_p = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

donc

$$\int_P d\omega = (-1)^{j-1} \int_P \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p.$$

On conclut alors avec le théorème de Fubini.  $\square$

Pour montrer le cas général, l'idée est de découper  $M$  en petits morceaux qui peuvent être vus comme les supports de  $p$ -courbes. Si  $\omega$  est nulle en dehors d'un de ces petits morceaux, on peut donc se ramener au cas d'un pavé de  $\mathbb{R}^p$  vu précédemment. Et dans le cas général il faut sommer les contributions de ce qu'il se passe sur chacun des petits morceaux. Pour une démonstration un peu plus précise et rigoureuse, voir [Ramis-Warusefel-Moulin].

## 14.9 Cas particuliers importants pour le théorème de Stokes

On a dit que le théorème de Stokes était une généralisation du théorème fondamental de l'analyse 11.15. Une première généralisation avait été la proposition 11.16. On avait ensuite vu la formule de Green-Riemann (voir le théorème 12.16). Tous ces résultats peuvent maintenant être vus comme des cas particuliers du théorème de Stokes.

Mais le théorème de Stokes inclut d'autres formules que vous avez utilisées (ou utiliserez) en physique. On énonce d'abord le théorème du rotationnel, qui ressemble à la formule de Green-Riemann, sauf que la surface considérée n'est plus simplement un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  mais vraiment une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Après avoir exprimé l'intégrale sur une courbe en fonction d'une « intégrale sur les points limites », puis l'intégrale sur une surface en fonction d'une intégrale sur la courbe qui entoure cette surface, on passe ensuite à la dimension supérieure, en exprimant une intégrale de volume en fonction d'une intégrale sur la surface qui l'entoure. C'est le théorème de flux-divergence, ou formule d'Ostrogradski.

**Théorème 14.30** (Théorème du rotationnel). *Soit  $S$  une surface orientée à bord de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\vec{\xi}$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  défini au voisinage de  $S \cup \partial S$ . Alors on a*

$$\iint_S \text{rot}(\vec{\xi}) \cdot \vec{\nu} dA = \oint_{\partial S} \vec{\xi} \cdot \vec{\tau} ds,$$

où  $\vec{\nu}$  est la normale à la surface  $S$ ,  $\vec{\tau}$  est le vecteur tangent à  $\partial S$  et  $\oint$  désigne une intégrale curviligne.

*Heuristique.* Considérons un petit carré de  $\mathbb{R}^3$  comme à la figure 14.2. La normale à ce carré est le vecteur  $e_x$ , donc l'intégrale de gauche dans le théorème du rotationnel est

$$\iint_S \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \right) d\tilde{y} d\tilde{z} = \delta y \delta z \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, y, z) \right) + \text{reste}.$$

Et l'intégrale curviligne de droite vaut

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{\xi} \cdot \vec{\tau} ds &= \delta y \xi_y(x, y, z) + \delta z \xi_z(x, y + \delta y, z) - \delta y \xi_y(x, y, z + \delta z) - \delta z \xi_z(x, y, z) + \text{reste} \\ &= -\delta y \frac{\partial \xi_y}{\partial z}(x, y, z) \delta z + \delta z \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(x, y, z) \delta y + \text{reste}. \end{aligned}$$

**Théorème 14.31** (Formule d'Ostrogradski - Théorème de flux-divergence). *Soit  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface lisse fermée délimitant un ouvert  $\Omega$  et orientée par le champ de vecteur  $\vec{N}$  normal à  $S$  et pointant vers l'extérieur de  $S$ . Alors*

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{\xi}) dV = \iint_S \vec{\xi} \cdot \vec{\nu} dA.$$

**Exercice 14.4.** Écrire une heuristique pour la formule d'Ostrogradski en considérant un petit cube de  $\mathbb{R}^3$  de dimensions  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$ .

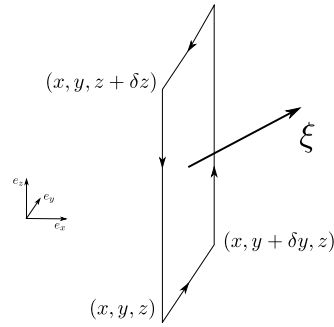


FIGURE 14.2 – Théorème du rotationnel sur un petit carré.

## 14.10 Exercices

**Exercice 14.5.** On considère sur  $\mathbb{R}^n$  une forme bilinéaire alternée  $\omega$  et une forme linéaire  $\alpha$ . Pour  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n$  on note

$$(\omega \wedge \alpha)(u, v, w) = \omega(u, v)\alpha(w) - \omega(u, w)\alpha(v) + \omega(v, w)\alpha(u).$$

Montrer que  $\omega \wedge \alpha$  est une forme trilinéaire alternée sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 14.6.** Montrer que  $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et préciser sa dimension.

**Exercice 14.7.** 1. Calculer la dérivée extérieure des formes différentielles suivantes :

$$\omega_1(x, y) = \cos(xy) dx, \quad \omega_2(x, y) = e^x dx - \sin(y) dy, \quad \omega_3(x, y, z) = xyz dx \wedge dy.$$

2. Calculer les dérivées extérieures  $d^2\omega_1$ ,  $d^2\omega_2$  et  $d^2\omega_3$  des formes  $d\omega_1$ ,  $d\omega_2$  et  $d\omega_3$ .

**Exercice 14.8.** Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f$  une fonction lisse sur  $\mathcal{U}$ ,  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs lisses sur  $\mathcal{U}$ . Montrer que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\nabla f) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}X) = 0,$$

$$\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + X \cdot f,$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(fX) = f\overrightarrow{\text{rot}}(X) + (\nabla f) \times X,$$

$$\text{div}(X \times Y) = Y \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(X) - X \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(Y).$$

**Exercice 14.9.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^3$  et  $\overrightarrow{\xi}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$ .

1. Montrer que si  $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\xi} = 0$  alors il existe une fonction  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $\overrightarrow{\xi} = \nabla f$ .

2. Montrer que si  $\text{div} \xi = 0$  alors il existe un champ de vecteur  $\overrightarrow{\eta}$  de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{U}$  tel que  $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\eta}$ .