Université Paul Sabatier
L2 Mathématiques – Année 2015-2016
Algèbre linéaire et bilinéaire

FEUILLE 5 : Groupe orthogonal et endomorphismes symétriques

Exercice 1.
Déterminer les valeurs des réels a, b, c pour lesquels les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & b & c \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & a \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & b \\ 0 & \sqrt{6} & c & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Etant donnés un élément non nul u de E et un élément α de $\mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in E, f(x) = x + \alpha < x, u > u$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E,
b) Trouver les réels α pour que f soit orthogonal,
c) On suppose α non nul et f orthogonal.
i) Calculer $f(u)$
ii) Calculer $f(x)$ lorsque $< x, u >= 0$,
iii) Diagonaliser f.

Exercice 3.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
a) du demi-tour autour de la droite D définie par $x = 2y = 2z$,
b) de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe dirigé par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Exercice 4.
Donner la nature géométrique et les éléments caractéristiques de chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et de sa base canonique. Considérons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A est orthogonale,
b) Justifier que u est une isométrie, puis préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 6.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme orthogonal,

2) f est-il une rotation ? Une symétrie ? Déterminer $D = Ker(f + Id)$.

3) On note s la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$. Montrer que $f \circ s = s \circ f$ est une rotation et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les plans P_1 et P_2 respectivement par les équations $x+y+z = 0$ et $x+2y-z = 0$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $s_1 \circ s_2$ où s_i désigne la réflexion orthogonale par rapport au plan P_i, $i = 1, 2$.

Exercice 8.

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on a : $(P(f))^* = P(f^*)$. En déduire que f et f^* ont même polynôme minimal et que f est diagonalisable si et seulement si f^* l'est.

Exercice 9.

Soient $(E, <, >)$ un espace euclidien et p un projecteur ($p \circ p = p$) de E.

a) Montrer que p^* est un projecteur.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $p^* = p$

ii) p est la projection orthogonale sur $Im(p)$

iii) p et p^* commutent

Exercice 10.

Déterminer une base orthonormale formée de vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est reprśenté par la matrice A.

Exercice 11.

Soit $A = ((a_{ij}))$ une matrice symétrique réelle représentant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$. Montrer que ses valeurs propres λ_i vérifient :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

(On montrera d'abord que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, la quantité $\sum_{i=1}^{n} ||u(e_i)||^2$ ne dépend pas de la base choisie)

Exercice 12.

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $Tr(A^2) < \frac{9n}{16}$. Montrer que l'équation $M^2 + M + I_n = A$ n'admet pas de solution M symétrique réelle.

Exercice 13.

Soit E un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E. Montrer que u est orthogonal si et seulement si le polynôme minimal de u divise $X^2 - 1$.