TD n° 1

Réduction des endomorphismes.

Exercice 1.1. Soient E un K-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces non réduits à $\{0\}$ et supplémentaires dans E.
1. On note p la projection de E sur F parallèlement à G. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
2. Même question en considérant maintenant la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 1.2. Donner sans calcul l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f \in L(E)$ et $g = f^2$ (on rappelle que f^2 est par définition l'endomorphisme $f \circ f$).
1. Soit $x \in E$.
  a. Montrer que si x est un vecteur propre pour f, alors c'est un vecteur propre pour g.
  b. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si f est diagonalisable alors g est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si g est diagonalisable alors il existe $\tilde{f} \in L(E)$ diagonalisable tel que $\tilde{f}^2 = g$.

Exercice 1.4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux endomorphismes de E.
1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
2. Supposons que $f \circ g = g \circ f$ et que g admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'alors f et g admettent une base de vecteurs propres commune.
3. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux disjoints et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $BD = DB$. Montrer par calcul direct que B est diagonale. Faire le lien avec la question précédente.

Exercice 1.5. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ un endomorphisme de rang 1 et de trace $\alpha \in K$.
1. Montrer que $u^2 = \alpha u$.
2. a. On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que u n'admet pas de valeur propre non nulle.
  b. On suppose que $\alpha \neq 0$. Montrer que α est valeur propre de u.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1.6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calculer son polynôme caractéristique, déterminer le spectre de la matrice A, indiquer si elle est diagonalisable et, le cas échéant, la diagonaliser.

Exercice 1.7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

On admet que les valeurs propres de A sont -2 et 3.
1. Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 1.8. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.9. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.10. Montrer que toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

Exercice 1.11. Cet exercice fait suite à l'exercice 1.3 (mais est indépendant). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner l'ensemble des matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$ (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.4).

Exercice 1.12. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 1.13. Soit $k \in \mathbb{C}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -1 & i \\ -1 & k & -1 \\ i & 1 & 2i \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres. Pour quelle(s) valeur(s) de k, f est-il diagonalisable ?

Exercice 1.14. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux, de base canonique $(1, X, X^2)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par : si $Q \in E, u(Q(X)) = (X+3)Q'(X)$.
1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de E.
2. Sans calcul, dîtes pourquoi u est diagonalisable. Puis donner une base de vecteurs propres de u.

Exercice 1.15. Donnons-nous $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par Q.
1. Vérifier que f est bien un endomorphisme.
2. Montrer que f est diagonalisable

Exercice 1.16. Retrouver le résultat de la deuxième question de l'exercice 1.5 en utilisant les maintenant les polynômes annulateurs.

Exercice 1.17. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, p une projection de E (*i.e.* $p \circ p = p$) et s une symétrie de E (*i.e.* $s^2 = \mathrm{Id}_E$). Montrer que p et s sont diagonalisables. Montrer de plus que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 1.18. (Partiel Novembre 2014). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $u \in L(E)$ tel que $u^4 = u^2$. Montrer que si 1 et -1 sont valeurs propres de u alors u est diagonalisable.

Exercice 1.19. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n > 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f - Id_E$ soit de rang 1. Notons $H = Ker(f - Id_E)$
1. Donner la dimension de H. On notera $(e_1, ..., e_p)$ une base de H.
2. Soit $e \notin H$. Montrer que $(e_1, ..., e_p, e)$ est une base de E.
3. Ecrire la matrice de f dans la base précédente et en déduire que $f(e) - (detf)e \in H$.
4. Montrer que $P(X) = (X - 1)(X - detf)$ est un polynôme annulateur de f et donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 1.20. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} 2x & +3y & -3z & = & x' \\ -x & +z & = & y' \\ -x & +y & = & z' \end{cases}$$

Exercice 1.21. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer lorsqu'il existe, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

où a, b sont des complexes.

Exercice 1.22. On considère un endomorphisme f diagonalisable dans $\mathbb{C}^5$ dont les valeurs propres sont $-i$, 0, i et dont le polynôme caractéristique P_f est à coefficients réels. Donner la (ou les) expression(s) possible(s) pour le polynôme minimal m_f et le polynôme P_f.

Exercice 1.23. Soient E un K-espace vectoriel, a un vecteur non nul de E et f l'endomorphisme de E défini, pour $x \in E$, par $f(x) = \varphi(x)a$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E.
1. Quelles sont les valeurs propres de f ? Est-il diagonalisable ?
2. Trouver un polynôme annulateur de f.

Exercice 1.24. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour $n > 0$

1. en diagonalisant A,
2. en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme caractéristique de A.

Exercice 1.25. Déterminer les scalaires a, b, c pour lesquels A (respectivement B) est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & -a \\ b & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

Exercice 1.26. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable et inversible. En déduire son polynôme minimal et son inverse.

Exercice 1.27. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trigonaliser A et B en précisant les matrices de passage. Déterminer leur polynôme minimal.

Exercice 1.28. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18I = 0$$

Exercice 1.29. Pour chacune des suites suivantes, calculer u_n en fonction de n :
1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n > 0, u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$ et $u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2}$.
3. $u_0 = \alpha > 0$, $u_1 = \beta > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}}$.

Exercice 1.30. Pour chacune des matrices suivantes, calculer le polynôme minimal et les sous-espaces caractéristiques. En déduire une matrice réduite triangulaire (on donnera la matrice de passage) :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 1.31. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme de E non nul tel que $\varphi^3 + \varphi = 0$.
1. Démontrer que $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \ker(\varphi^2 + \mathrm{Id}_E)$.
3. Démontrer que pour tout $v \notin \ker(\varphi)$, le couple $(v, \varphi(v))$ est libre.
4. Que peut-on dire du polynôme minimal m_φ de φ ?
5. Si $\dim(E) = 2$, prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donner m_φ.
6. Si $dim(E) = 3$, prouver que $\dim(\ker(\varphi)) = 1$. En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$. Préciser m_φ.

Exercice 1.32. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en mettant A sous forme de Dunford.

Exercice 1.33. **(Partiel Novembre 2014).** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u, v \in L(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que v est nilpotent. On veut montrer que

$$\det(u + v) = \det(u).$$

1. a. Donner le polynôme caractéristique de v.
b. En déduire le résultat dans le cas où $u = \mathrm{Id}_E$.
2. a. Montrer que si u est inversible alors $u^{-1}v$ est nilpotent.
b. Montrer le résultat dans le cas où u est inversible.
3. a. Dans le cas général, montrer qu'il existe une infinité de réels θ tels que $u - \theta\,\mathrm{Id}_E$ est inversible.
b. En déduire qu'il existe une infinité de réels θ tels que $\det(u+v-\theta\,\mathrm{Id}_E) = \det(u - \theta\,\mathrm{Id}_E)$.
c. Conclure.

Exercice 1.34. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ est A.
1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que la matrice de f dans la base ε est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
a. Montrer que $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\ker(f - \mathrm{Id})^2$ sont stables par g.
b. En déduire qu'il existe $\lambda, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_\varepsilon(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser l'ensemble les valeurs possibles pour a, b, c, d.
4. On note $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Exercice 1.35. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E défini dans une base de E par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. u est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. Calculer les sous-espaces caractéristiques C_1 et C_2. Donner pour $k = 1, 2$ donner l'indice de nilpotence p_k de la restriction de l'endomorphisme $(u - kid_E)$ à C_k.
3. Montrer que pour tout $v \in C_2 - Ker((u - 2id_E)^{p_2 - 1})$, les vecteurs suivants forment une base de C_2 :

$$f_{p_2} = v, f_{p_2 - 1} = (u - 2id_E)(v), \ldots, f_1 = (u - 2id_E)^{p_2 - 1}(v)$$

4. On note F la complétée de la base précédente par une base de C_1. Donner la matrice de u dans la base F et exhiber sa décomposition de Dunford.

Exercice 1.36. Soit f un endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
1. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f et donner le polynôme minimal de f.
2. Donner la matrice réduite de Jordan de A en précisant une matrice de passage.

Exercice 1.37. Soit a un réel, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+a) & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

En discutant suivant les valeurs de a, donner une réduite de Jordan de A.