Algèbre Linéaire

Révisions de première année

1 Espaces vectoriels

1.1 Definition

Dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$) on sait additionner les vecteurs et les multiplier par des réels.

On définit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel comme étant un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par les réels qui vérifient les mêmes règles de calculs, données par un certain nombre de conditions abstraites, que l'on ne rappelle pas ici [1].

Exemples. Les ensembles suivants, munis de leurs additions et multiplications par les réels usuelles, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

(i) $\mathbb{R}^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$,

(ii) l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles,

(iii) l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels,

(iv) l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

(v) l'ensemble des fonctions d'un ensemble quelconque vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque,

(vi) etc.

Pour n'importe quel corps $\mathbb{K}$, on définit les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de façon analogue : au lieu d'une multiplication par les réels, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est muni d'une multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ (qu'on appelera *scalaires*). Pour toute la suite on fixe un corps $\mathbb{K}$. Dans un premier temps on pourra penser que ce corps $\mathbb{K}$ n'est autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans la suite, lorsqu'on dira simplement qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il sera implicite que E est muni d'une addition $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y$ et d'une multiplication scalaire $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F.$$

1. Il y a deux raisons de préférer raisonner dans un cadre abstrait plutôt que simplement pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le principal intérêt est bien sûr de traiter d'un seul coup toutes les situations qui fonctionnent de la même façon sans avoir à refaire à chaque fois tout le raisonnement. Mais cela permet également de bien mettre en valeur les propriétés qui sont effectivement utilisées pour les résultats qu'on va démontrer dans ce cadre (par exemple le produit scalaire et la notion d'orthogonalité seront introduits plus tard dans ce module, donc il est clair que ça n'interviendra pas du tout dans toute la première partie).

Proposition. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F, muni des restrictions de l'addition et de la multiplication scalaire de E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montre souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel déjà connu.

Exemple. Par exemple l'ensemble

$$F = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2\right\}$$

(muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles de $\mathbb{R}^2$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)$. Comme $x_1 + \lambda y_1 = x_2 + \lambda y_2$, on a bien $x + \lambda y \in F$. Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On obtient ainsi que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sans avoir à vérifier toutes les conditions de la définition.

1.3 Combinaisons linéaires, sous-espaces engendré par une famille quelconque, familles génératrices

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. Soit G une partie de E. On appelle combinaison linéaire d'éléments de G tout vecteur de E qui peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in G$.

Proposition-Définition. Soit G une partie de E. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de G est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par G et on le note $\mathrm{vect}(G)$.

Si $x_1, \ldots, x_p$ (avec $p \in \mathbb{N}$) sont des éléments de E, alors on note $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_p)$ le sous-espace $\mathrm{vect}(\{x_1, \ldots, x_p\})$.

Définition. Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est dite génératrice si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$. Si la famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ (avec $p \in \mathbb{N}$) est finie, cela signifie que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p.$$

Définition. On dit que l'espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de dimension infinie.

1.4 Familles libres

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre si pour tous $p \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_p \in \mathcal{F}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$$

on a

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Si $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ est finie, cela s'écrit simplement

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Pour montrer qu'une famille est libre, on utilise en général directement la définition.

Définition. On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

1.5 Bases et dimension d'un espace de dimension finie

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Proposition. *(i) Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.*
(ii) De toute famille génératrice de vecteurs de E on peut extraire une base de E.

Proposition-Définition. L'espace vectoriel E admet au moins une base. De plus, toutes les bases admettent le même nombre (fini) d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de l'espace vectoriel E.

Proposition. *On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.*
- *(i) Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Alors elle admet au plus n éléments. En outre elle admet n éléments si et seulement si c'est une base de E.*
- *(ii) Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. Alors elle admet au moins n éléments. En outre elle admet n éléments si et seulement si c'est une base de E.*

Cette proposition est très importante, car compter le nombre d'éléments d'une famille de vecteurs est bien plus facile que de vérifier qu'elle est génératrice. Pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base en dimension n, on se contentera souvent de montrer qu'elle est libre et qu'elle contient n éléments. La deuxième propriété peut également servir, plutôt dans des situations abstraites où pour une raison ou une autre on sait déjà qu'une famille est génératrice.

Proposition. *On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie inférieure ou égale à n. En outre on a $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.*

1.6 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E (avec $m \in \mathbb{N}$). Alors la somme $F_1 + \cdots + F_m$ de ces sous-espaces est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent sous la forme

$$x_1 + \cdots + x_m$$

avec $x_1 \in F_1$, …, $x_m \in F_m$.

Proposition. *La somme $F_1 + \cdots + F_m$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par l'ensemble $F_1 \cup \cdots \cup F_m$. En particulier, c'est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E (avec $m \in \mathbb{N}$). Alors on dit que ces sous-espaces sont en somme directe si pour tous $x_1 \in F_1, \dots, x_m \in F_m$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_m = 0$$

on a

$$x_1 = \cdots = x_m = 0.$$

Dans ce cas on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ la somme de ces sous-espaces.

Proposition. *(i) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*

(ii) Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E (avec $m \in \mathbb{N}$). Si la somme $F = F_1 + \dots F_m$ est directe alors tout $x \in F$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_m$ avec $x_j \in F_j$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

(iii) On suppose de plus que les sous-espaces $F_1, \dots, F_m$ sont tous de dimension finie. Alors on a

$$\dim(F) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_m).$$

⚠ *Cette propriété n'est pas vraie si la somme n'est pas supposée directe. Par contre le fait que E soit lui-même de dimension finie n'a pas d'importance.*

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$ (autrement dit, $F \oplus G = E$).

Proposition. *On suppose que E est de dimension finie.*

(i) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet au moins un sous-espace supplémentaire G et on a

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

(ii) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) = E$. *Alors on a :*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff F \cap G = \{0\} \iff F + G = E.$$

2 Applications linéaires

2.1 Définition

Dans cette partie on considère trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G.

Définition. Soit u une application de E dans F. On dit que u est linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans lui-même.

Proposition-Définition. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel que l'on note $L(E, F)$ (on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E).

Proposition. *Soit $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors $v \circ u$ est une application linéaire de E dans G.*

2.2 Noyau, image, théorème du rang

Dans cette partie on considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Proposition-Définition. Soit $u \in L(E, F)$. On appelle noyau de u l'ensemble

$$\ker(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$$

Le noyau de u est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition-Définition. Soit $u \in L(E,F)$. On appelle image de u l'ensemble

$$\mathrm{Im}(u) = \{u(x), x \in E\}$$

L'image de u est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on appelle rang de u et on note $\mathrm{rang}(u)$ sa dimension.

Théorème (Théorème du rang)**.** *On suppose que E est de dimension finie. On considère $u \in L(E)$. Alors on a*

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rang}(u).$$

Définition. On appelle isomophisme de E dans F une application linéaire bijective de E dans F. On appelle isomorphisme de E un isomorphisme de E dans lui-même. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E.

Proposition. *On suppose que u est un isomophisme de E dans F.*

(i) Si E est de dimension finie alors F est également de dimension finie et on a $\dim(F) = \dim(E)$.

(ii) La bijection réciproque u^{-1} définit un isomorphisme de F dans E.

Proposition. *On suppose que E est de dimension finie n et on considère un endomorphisme u de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est un isomorphisme de E.

(ii) $\ker(u) = \{0\}$ *(u est injectif).*

(iii) $\mathrm{Im}(u) = E$ *(u est surjectif).*

(iv) $\mathrm{rang}(u) = n$.

(v) Il existe $v \in L(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ (u admet un inverse à droite).

(vi) Il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ (u admet un inverse à gauche).

⚠ Ce résultat n'est pas vrai en dimension infinie !

2.3 Matrice d'une application linéaire dans une base donnée

Dans cette partie on considère trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G de dimensions finies. On note n la dimension de E et m la dimension de F.

Définition. Soient $e = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E et $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de F. Soit $u \in L(E)$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on note $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{m,j} \in \mathbb{K}$ les coefficients de $u(e_j)$ dans la base f :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} f_i.$$

On appelle alors matrice de u dans les bases e et f la matrice

$$\mathrm{Mat}_{e \to f}(u) = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

(la $j^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice regroupe les coefficients de $u(e_j)$ dans la base d'arrivée f).

Si $u \in L(E)$ on note

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_{e \to e}(u) \in M_n(\mathbb{K}).$$

Proposition. *Soient e, f et g des bases de E, F et G, respectivement. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{e\to g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f\to g}\, v \bullet \mathrm{Mat}_{e\to f}\, u.$$

Théorème. *Soient e et $\tilde{e}$ des bases de E et f et $\tilde{f}$ des bases de F. Soit $u \in L(E)$. Alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{e}\to\tilde{f}}\, u = \mathrm{Mat}_{f\to\tilde{f}}\, \mathrm{Id}_F \bullet \mathrm{Mat}_{e\to f} \bullet \mathrm{Mat}_{\tilde{e}\to e}\, \mathrm{Id}_E,$$

où Id_E désigne l'application identité de E.

Définition. La matrice de l'application identité de E muni de la base $\tilde{e}$ vers E muni de la base e est appelé matrice de passage de e à $\tilde{e}$. Elle est parfois notée $P_e^{\tilde{e}}$.

Remarque. Les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes de E sont semblables.

Le théorème 2.3 est particulièrement important. En effet, la matrice d'un endomorphisme u dépend du choix des bases de E et F. Parfois, la matrice obtenue est compliquée pour faire des calculs, mais on peut chercher à tout exprimer dans d'autres bases dans lesquelles la matrice de u sera plus simple. Ce sera l'enjeu du cours de réduction des endomorphimes. Il sera donc important d'effectuer correctement les changements de bases.

2.4 Formes linéaires

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition-Définition. On appelle espace dual de E et on note E^* l'espace $L(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E. Si E est de dimension finie, alors E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Proposition-Définition. On suppose que E est de dimension finie n et on considère une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on note e_j^* la forme linéaire qui à $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ (écriture unique) associe x_j. Alors la famille $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de e.

2.5 Projections et symétries

Dans cette partie on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E.

Définition. On appelle projection (de E) sur F parallèlement à G l'application qui à $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, écriture unique) associe x_F.

Proposition. *La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E de noyau G et d'image F. En outre on a $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = F$ et $p^2 = p$.*

Définition. On appelle projection de E tout endomorphisme $p \in L(E)$ tel que $p^2 = p$.

Proposition. *Soit $p \in L(E)$ une projection. Alors p est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(p)$.*

Définition. On appelle symétrie (de E) par rapport à F et parallèlement à G l'application qui à $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, écriture unique) associe $x_F - x_G$.

Proposition. *La symétrie s par rapport à F et parallèlement à G est un isomorphisme de E tel que* $\ker(u - \mathrm{Id}_E) = F$ *et* $\ker(u + \mathrm{Id}_E) = G$. *En outre on a* $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Définition. On appelle symétrie de E tout endomorphisme $s \in L(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Proposition. *Soit $s \in L(E)$ une symétrie. Alors s est la symétrie de E par rapport à* $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ *et parallèlement à* $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

A Matrices

A.1 Définitions

Définition. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ une application de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. L'ensemble de ces matrices est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (on note $M_n(\mathbb{K})$ pour $M_{n,n}(\mathbb{K})$).

Une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est représentée par un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On définit sur $M_{n,p}$ une addition et une multiplication externe de façon évidente :

$$(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

et

$$\lambda(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Proposition. *Muni de ces deux opérations, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.*

Le produit matriciel est défini de la façon suivante : Pour $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B(b_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant k\leqslant q}} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ on définit

$$AB = (c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant q}}$$

avec pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.$$

⚠ Attention à la compatibilité des dimensions !

Exemple. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le produit AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 8 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par exemple pour le coefficient en haut à droite, le 5 est obtenu par le calcul $1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 1$.

Proposition-Définition. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors l'application

$$u_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, appelée application linéaire associée à A.

On appelle noyau de la matrice A (et on note $\ker(A)$) le noyau de l'endomorphisme u_A, image de la matrice A (notée $\text{Im}(A)$) l'image de l'endomorphisme u_A, rang de la matrice A (noté $\text{rang}(A)$) le rang de l'endomorphisme u_A (c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les p colonnes de A).

Proposition-Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice identité (avec des 1 sur la diagonale et des 0 en-dehors). Dans ce cas la matrice B est unique et est noté A^{-1}. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ inversibles.

Proposition. *les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La matrice A est inversible.*

(ii) $u_A \in GL(\mathbb{K}^n)$

(iii) $\ker(A) = \{0\}$.

(iv) $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

(v) $\text{rang}(A) = n$.

(vi) *Il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.*

(vii) *Il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.*

Proposition. *Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice AB est inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$ on a $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Proposition. *On a $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA)$. Ainsi le rang de A est aussi la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ engendré par les (transposées des) n lignes de A.*

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}.$$

Proposition. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. *Alors on a* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Définition. On dit que les matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition. *Deux matrices semblables ont même trace.*

A.2 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant est uniquement défini pour une matrice carrée. Il y a plusieurs façons de le définir (malheureusement aucune n'est particulièrement simple).

Proposition. *Le déterminant est l'unique application de* $M_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$ *vérifiant les trois propriétés suivantes.*

(i) Le déterminant est une application linéaire par rapport à chacune de ses colonnes, les autres étant fixées.

(ii) Si deux colonnes d'une matrice sont égales, alors le déterminant de cette matrice est nul.

(iii) Le déterminant de la matrice identité vaut 1.

De ces propriétés on déduit en particulier qu'**on ne modifie pas le déterminant si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes**. On obtient également une méthode de calcul d'un déterminant par récurrence sur la dimension de la matrice.

Proposition. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. *Pour* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *on note* $A^{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en retirant à* A *la* $i^{\text{ième}}$ *ligne et la* $j^{\text{ième}}$ *colonne. Pour* $j \in [\![1, n]\!]$ *on a alors*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A^{i,j}).$$

Le scalaire $\det(A^{i,j})$ est appelé cofacteur de A d'indices (i, j). On observe que le signe $(-1)^{i+j}$ est une alternance de $+1$ et de -1 qui vaut $+1$ sur la diagonale :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Cas des matrices de petites dimensions : Le déterminant de la matrice $(a) \in M_1(\mathbb{K})$ est simplement a. Pour une matrice de $M_2(\mathbb{K})$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Ce déterminant est égal à l'aire du parallèlogramme dont deux côtés sont donnés par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. En particulier on retrouve que le déterminant est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.

Pour une matrice $A \in M_3(\mathbb{K})$ on peut utiliser la règle de Sarrus. Si on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \clubsuit & \blacklozenge \\ \blacklozenge & \square & \clubsuit \\ \clubsuit & \blacklozenge & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle & \bigstar & \spadesuit \\ \bigstar & \spadesuit & \triangle \\ \spadesuit & \triangle & \bigstar \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\det(A) = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}}_{\square} + \underbrace{a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}}_{\clubsuit} + \underbrace{a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}}_{\blacklozenge} - \underbrace{a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}}_{\spadesuit} - \underbrace{a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}}_{\vartriangle} - \underbrace{a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}}_{\bigstar}.$$

On peut vérifier que ce déterminant est égal au volume du parallélépipède basé sur les trois vecteurs colonne de la matrice.

Proposition. *(i) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a $\det({}^tA) = \det(A)$.*

(ii) Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iii) Deux matrices semblables ont même déterminant.

(iv) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible, et dans ce cas on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

La première propriété assure en particulier que toutes les propriétés du déterminant utilisant les colonnes de la matrice sont également valables en considérant les lignes.

Proposition. *(i) Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), et donc en particulier d'une matrice diagonale, est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminant des blocs diagonaux : si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $C \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors on a

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det(A)\det(C).$$

Définition. Soit $f_1, \dots, f_n$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ et on note $\det(f_1, \dots, f_n)$ le déterminant de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $f_1, \dots, f_n$.

Proposition. *Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors cette famille est libre (et donc une base) si et seulement si $\det(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.*

A.3 Résolution de systèmes linéaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ sont dans $\mathbb{K}$. Notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, ce système s'écrit encore

$$AX = B,$$

où l'inconnue est maintenant $X \in \mathbb{K}^p$. Si B n'est pas dans l'image de A, alors ce problème n'a pas de solution. Si B est dans l'image de A, alors l'ensemble des solutions est le *sous-espace affine*

$$X_0 + \ker(A) = \left\{ X_0 + \tilde{X}, \tilde{X} \in \ker(A) \right\},$$

où X_0 est une solution particulière. Si A est inversible (seulement possible si $n = p$), le problème admet une unique solution.

Concrètement, un tel système peut être résolu en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.