Algèbre Linéaire et bilinéaire

Durée : 2 heures.

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc...) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique P_a de M_a. Donner l'ensemble des valeurs propres de f_a.
2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
3. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il inversible ?
4. On suppose dans cette question que $a = 0$.
  a. Diagonaliser la matrice M_0 en précisant la matrice de passage.
  b. Donner le polynôme minimal de f_0.
5. On suppose dans cette question que $a = 2$.
  a. Calculer les sous-espaces caractéristiques de f_2.
  b. En déduire une trigonalisation de M_2 en précisant la matrice de passage.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement donnés par

$$P_f(X) = (1+X)(X-1)^3(X-2)^2$$

et

$$m_f(X) = (1+X)(X-1)(X-2)$$

Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres ? Justifier.

Exercice 3. Soient A une matrice carrée de taille n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M, i. e. l'ensemble des valeurs propres de M.
1. Montrer que $P(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}(P(A))$; on rappelle que $P(\mathrm{Sp}(A)) = \{P(\lambda) \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
2. On suppose que $K = \mathbb{C}$. On veut montrer que l'inclusion précédente est en fait une égalité.
  a. Montrer que c'est effectivement le cas si P est un polynôme constant.
Pour la suite de la question on suppose que $\deg(P) \geq 1$. On considère $\alpha \in \mathrm{Sp}(P(A))$ et on pose $Q(X) = P(X) - \alpha$.
  b. Montrer que la matrice $Q(A)$ n'est pas inversible.
  c. Justifier qu'on peut écrire $Q(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X - r_i)$, avec $a, r_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $A - r_{k_0} I_n$ n'est pas inversible et en déduire que $r_{k_0} \in \mathrm{Sp}(A)$.
  d. Conclure.
3. On suppose maintenant que $K = \mathbb{R}$. En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(X) = X^2$, montrer que l'inclusion $P(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}(P(A))$ peut être stricte.