Algèbre linéaire et bilinéaire

Examen final - 07 janvier 2016

Durée : 3 heures.

Aucun document (ni calculatrice, téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Commentaires : Dans une question du type "Montrer que..." où la conclusion est donnée dans l'énoncé, il est *extrêmement mal vu* de tenter un bluff, c'est-à-dire d'écrire pas grand chose (grosso modo l'hypothèse) puis la conclusion avec un "donc" entre les deux. Cela ne trompe personne et est même pénalisé. Si vous ne savez pas répondre, ne répondez pas. De même, si vous avez un raisonnement qui n'aboutit pas, il est pénalisant d'écrire "donc la conclusion" comme si de rien n'était (cette remarque ne concerne évidemment pas des véritables erreurs de calculs ou de raisonnement qui malheureusement peuvent aussi arriver).

Exercice 1. On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, on définit pour tous i et j dans $\{1, \dots, n\}$, l'endomorphisme $\mathcal{E}_{i,j} : E \longrightarrow E$ par $\mathcal{E}_{i,j}(e_k) = e_i$ si $k = j$ et $\mathcal{E}_{i,j}(e_k) = 0$ si $k \neq j$. Montrer que $\{\mathcal{E}_{i,j}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère l'application linéaire $L_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $L_u(f) = u \circ f$.

a. Montrer que pout tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $L_{P(u)} = P(L_u)$.

b. En déduire que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u et L_u ont le même polynôme minimal.

c. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si L_u est diagonalisable.

3. Maintenant, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\Phi_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire définie par $\Phi_u(f) = u \circ f - f \circ u$.

On suppose que u est diagonalisable et on note $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E qui diagonalise u. On considère alors les endomorphismes $\mathcal{E}_{i,j}$ définis comme à la première question.

a. Montrer que pour tous i et j dans $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{E}_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_u (préciser la valeur propre associée).

b. Montrer que Φ_u est diagonalisable.

Correction : **1.** On considère une famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de réels tels que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} \mathcal{E}_{i,j} = 0.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$0 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} \mathcal{E}_{i,j}(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} e_i.$$

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on obtient que $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ceci étant valable pour n'importe quel $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient que tous les coefficients $\lambda_{i,k}$ sont nuls. Cela prouve que la famille $(\mathcal{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre. Comme elle contient $n^2 = \dim(L(E))$ éléments, c'est bien une base de $L(E)$.

2. a. Soit $u \in L(E)$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $L_{u^k} = (L_u)^k$. Pour $k = 0$ on a

$$L_{u^0} = L_{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_{L(E)} = (L_u)^0,$$

et pour $k = 1$ on a bien $L_{u^1} = L_u = (L_u)^1$. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k-1$ (avec $k \geqslant 2$). Pour $f \in L(E)$ on a

$$L_{u^k}(f) = u^k \circ f = u \circ u^{k-1} \circ f = u \circ (L_u)^{k-1}(f) = L_u\big((L_u)^{k-1}(f)\big) = (L_u)^k(f).$$

Ainsi $L_{u^k} = (L_u)^k$. Montrons maintenant que l'application $u \mapsto L_u$ est linéaire. Soient $u, v \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $f \in L(E)$ on a alors

$$L_{u+\lambda v}(f) = (u + \lambda v) \circ f = u \circ f + \lambda v \circ f = L_u(f) + \lambda L(v).$$

Cela prouve que $L_{u+\lambda v} = L_u + \lambda L_v$, et donc que L est linaire. Soit maintenant $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a alors

$$L_{P(u)} = L_{\sum_{k=0}^{m} a_k u^k} = \sum_{k=0}^{m} a_k L_{u^k} = \sum_{k=0}^{m} a_k (L_u)^k = P(L_u).$$

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $P(u) = 0$. Alors on a $P(L_u) = L_{P(u)} = 0$. Inversement si $P(L_u) = 0$ alors $L_{P(u)} = 0$. En particulier $P(u) \circ \mathrm{Id}_E = 0$ donc $P(u) = 0$. Ainsi $P(u) = 0$ si et seulement si $P(L_u) = 0$. Cela prouve que u et L_u ont les mêmes polynômes annulateurs, et donc le même polynôme minimal.

c. On rappelle qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Puisque u et L_u ont même polynôme minimal, cela implique que u est diagonalisable si et seulement si L_u l'est.

3. a. Pour $l \in [\![1, n]\!]$ on note λ_l la valeur propre de u telle que $u(e_l) = \lambda_l e_l$. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
\Phi_u(\mathcal{E}_{i,j})(e_k) &= u(\mathcal{E}_{i,j}(e_k)) - \mathcal{E}_{i,j}(u(e_k)) \\
&= u(\delta_{j,k} e_i) - \mathcal{E}_{i,j}(\lambda_k e_k) \\
&= \delta_{j,k} \lambda_i e_i - \delta_{j,k} \lambda_k e_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) \mathcal{E}_{i,j}(e_k).
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, cela prouve que $\Phi_u(\mathcal{E}_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)\mathcal{E}_{i,j}$. Comme en outre $\mathcal{E}_{i,j} \neq 0$ (puisque $\mathcal{E}_{i,j}(e_j) \neq 0$), on obtient que $\mathcal{E}_{i,j}$ est un vecteur propre pour Φ_u associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

b. D'après les questions 1 et 3.a la famille $(\mathcal{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $L(E)$ constituée de vecteurs propres pour Φ_u, qui est donc diagonalisable.

Commentaires :

- Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors $L(E)$ est de dimension n^2.
- Et la famille $(\mathcal{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ contient n^2 éléments...
- Parler de la dimension d'une famille (ou même de l'un de ses éléments) n'a aucun sens.
- Attention, il est certes perturbant de travailler dans un espace d'applications linéaires (et donc avec des applications linéaires dont les arguments sont eux-mêmes des applications linéaires), mais toute la théorie fonctionne de la même façon. Il suffit de faire attention à chaque instant à la nature des objets que l'on manipule. C'était la seule difficulté de cet exercice.
- En particulier, attention aux polynômes d'endomorphismes. Par exemples pour $u, f \in L(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ on a en général
  $$P(u) \circ f \neq P(u \circ f).$$
  Par exemple si $P(X) = X^2$ on a $P(u) \circ f = u^2 \circ f = u \circ u \circ f$ tandis que $P(u \circ f) = (u \circ f)^2 = u \circ f \circ u \circ f$.
- Dans le même genre,
  $$L_{P(u)}(f) \neq P \circ u \circ f.$$
  Le terme de droite n'a tout simplement aucun sens. La bonne expression est
  $$L_{P(u)}(f) = P(u) \circ f.$$

Exercice 2. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et en préciser les éléments caractéristiques.

Correction : On obtient que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigée par le vecteur $(1,1,1)$.

Exercice 3. Pour $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$q(X) = x^2 - y^2 - 6z^2 - t^2 + 2xy + 2xz + 10yz - 4yt + 6zt.$$

Calculer le rang et la signature de la forme quadratique q.

Correction : On effectue une réduction de Gauss de la forme quadratique q. Pour $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ on a

$$\begin{aligned} q(X) &= (x+y+z)^2 - 2y^2 + 8yz - 4yt - 7z^2 - t^2 + 6zt \\ &= (x+y+z)^2 - 2(y-2z+t)^2 + z^2 + t^2 - 2zt \\ &= (x+y+z)^2 - 2(y-2z+t)^2 + (z-t)^2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que la signature de q est (2,1) (et q est de rang 3).

Exercice 4. Soient f et g deux rotations de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire $f, g \in SO(3)$) différentes de l'identité et commutant entre elles. On notera u un vecteur directeur de l'axe de f.
1. Montrer que $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
2. On suppose que $g(u) = u$. Montrer que f et g sont deux rotations de même axe.
3. On suppose maintenant que $g(u) = -u$.
  a. On note v un vecteur directeur de l'axe de g. Montrer que u et v sont orthogonaux.
  b. Montrer que f et g sont deux symétries par rapport à des droites orthogonales.

Correction : **1.** On a $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$, donc $g(u)$ appartient à l'axe $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}u$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$. En outre g est une isométrie donc $|\lambda| \|u\| = \|g(u)\| = \|u\|$. Puisque u n'est pas nul, on a nécessairement $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
2. Si $g(u) = u$ alors g est une rotation d'axe $\mathbb{R}u$, comme f.
3. a. Comme g est une isométrie on a

$$\langle u, v\rangle = \langle g(u), g(v)\rangle = \langle -u, v\rangle = -\langle u, v\rangle .$$

Cela prouve que $\langle u, v\rangle = 0$, et donc que u et v sont orthogonaux.
  b. On note θ l'angle de la rotation g. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de E est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de g est donc

$$\chi_g(X) = \big((\cos(\theta) - X)^2 + \sin(\theta)^2\big)(1 - X).$$

Puisque -1 est valeur propre de g (et donc racine de χ_g) on a nécessairement $\theta \equiv \pi[2\pi]$, ce qui prouve que g est une symétrie orthogonale par rapport à son axe. Comme précédemment on vérifie que $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. Puisque f et g ne sont pas des rotations de même axe, on a $f(v) = -v$. On conclut alors que f est une symétrie orthogonale par rapport à son axe. Puisque u et v sont orthogonaux, on obtient bien que f et g sont des symétries orthogonales par rapport à des axes orthogonaux.

Commentaires :

- Une phrase telle que "u est l'axe de rotation de f" n'a aucun sens, puisque u est un vecteur et l'axe de rotation de f est une droite (soit un ensemble de vecteurs).

Exercice 5. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
1. Montrer que si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = B$.
2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que ${}^tAA$ est symétrique et que ses valeurs propres sont non nulles.

b. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. On note f^* l'adjoint de f. Soit λ une valeur propre de $f^* \circ f$ et u un vecteur propre associé. Montrer que $\|f(u)\|^2 = \lambda\|u\|^2$.

c. Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. En déduire que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in O(n)$ telles que $A = MS$.

Correction : **1.** Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Puisque B est en particulier symétrique réelle, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telle que $B = PDP^{-1}$. On note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Puisque les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B, ils sont tous strictement positifs. On note

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = P\tilde{D}P^{-1}.$$

Alors R est diagonalisable et ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ sont strictement positives. En outre

$${}^tR = {}^t(P^{-1})\,{}^t\tilde{D}\,{}^tP = P\tilde{D}P^{-1} = R$$

Cela prouve que $R \in S_n^{++}$. En outre on a

$$R^2 = P\tilde{D}P^{-1}P\tilde{D}P^{-1} = P\tilde{D}^2P^{-1} = PDP^{-1} = B.$$

2. a. On a

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA,$$

donc ${}^tAA$ est une matrice symétrique. En outre

$$\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2 \neq 0,$$

ce qui prouve que 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$.

b. On a

$$\|f(u)\|^2 = \langle f^*(f(u)), u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda \|u\|^2.$$

Puisque $u \neq 0$ on a alors

$$\lambda = \frac{\|f(u)\|^2}{\|u\|^2} > 0.$$

c. La matrice de $f^* \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est ${}^tAA$. Ainsi les valeurs propres de ${}^tAA$ sont les valeurs propres de $f^* \circ f$ et sont donc, d'après la question précédente, strictement positives. On a déjà vu que ${}^tAA$ est symétrique, on obtient donc que ${}^tAA \in S_n^{++}$.

3. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 2 on a ${}^tAA \in S_n^{++}$ et donc, d'après la question 1, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tAA$. En particulier S est inversible et on peut noter $M = AS^{-1}$. Il reste à prouver que $M \in O(n)$. Pour cela on écrit

$${}^tMM = {}^t(S^{-1})\,{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

D'où le résultat.