Université Paul Sabatier, **L1 Special**
Année universitaire 2015-2016

TD4 : Fonctions d'une variable réelle (2)

Exercice 1 On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\cos x + \sin^2 x}$.

1. Etudier la fonction f sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$.
2. Combien l'équation $f(x) = \sqrt{e}$ a-t-elle de solution dans I ?

Exercice 2 On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Calculer $f'(x)$ et simplifier l'expression.
3. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
4. Soit g la fonction réciproque de f.
   (a) Préciser les variations de g.
   (b) Calculer $g'(f(\frac{\pi}{6}))$.
   (c) Expliciter $g(x)$ et retrouver les résultats précédents.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculer $\arccos(\sin(3\pi/2))$, $\arcsin(\sin(11\pi/7))$, $\arctan(\tan(-17\pi/5))$.
3. On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Calculer sa dérivée et la simplifier au maximum.
   (c) f est-elle dérivable en 0 ?

(d) Donner une expression plus simple de f par une fonction usuelle.

Exercice 4

1. Montrer que $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $y > 0$. Que vaut cette somme pour $y < 0$?
2. Donner deux expressions de la dérivée de $x \mapsto \tan x$. En déduire $\cos^2(\arctan x)$.
3. On considère la fonction définie par $g(x) = \arctan(\frac{1}{\sqrt{x}})$ sur $I =]0, +\infty[$.
   (a) Montrer que g est continue sur I.
   (b) Calculer la limite de g à droite en 0. Montrer qu'on peut prolonger g par continuité en 0. On note toujours g la fonction ainsi prolongée.
   (c) Montrer que g est dérivable sur I et calculer g'.
   (d) g est telle dérivable en 0 ? On pourra utiliser la question 1.
   (e) Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
   (f) La fonction réciproque g^{-1} est-elle croissante ? décroissante ?

Exercice 5

Soit $f(x) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}.x+1}{x-1}\right)$. Soit x_0 tel que $\frac{\frac{\pi}{2}.x_0+1}{x_0-1} = 3\pi/2$.

1. Donner l'ensemble de définition ainsi que l'ensemble image de la fonction arcsin.
2. Calculer x_0.
3. Montrer que f définit une bijection g de $[x_0, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
4. Donner l'expression de la réciproque de g (attention au piège !)