TD n° 3

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 3.1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Simplifier lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$(a^4+a^2).a^{-3} \qquad \ln(a)+3\ln(b)-\frac{1}{2}\ln(a^4) \qquad \frac{\ln(ab)}{\ln(a)} \qquad \ln(a+b)-\ln(b)$$

$$e^{a+b}-e^b \qquad e^{a+b}.e^{-2a} \qquad \frac{(e^a)^3}{e^{2a}} \qquad \frac{(e^a)^3}{e^{a^3}}$$

Exercice 3.2. Existence et calcul de limites :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$; $\quad \lim_{x\to 0} x^{-3}e^{-x}$; $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{-2}\ln(x)^3$;
2. $\lim_{x\to+\infty} (x\ln(x))^{-4}e^{x}$; $\quad \lim_{x\to 0} \ln(x)^4xe^{-2x}$; $\quad \lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x}$;
3. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(e^x+e^{-x})$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+4x^3+x^2-2}{-3x^2+50x+1}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^3+4x^2+x}$
5. $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; $\quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ $\quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{x-1}$

Exercice 3.3. Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ une fonction qui tend vers 2 en 0. Montrer qu'il existe $\nu>0$ tel que $f(x)>\nu$ pour tout $x\in]-\nu,0[\cup]0,\nu[$.

Exercice 3.4. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ et deux fonctions ε_1 et ε_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que ε_1 et ε_2 tendent vers 0 en 0 et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+x^2\varepsilon_2(x).$$

1. Montrer qu'il existe $c_0,c_1,c_2\in\mathbb{R}$ et une fonction ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$(f+g)(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\varepsilon(x)$$

2. Même question en remplaçant $f+g$ par fg.

Exercice 3.5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+x^2\varepsilon_1(x).$$

1. On suppose que $a_0\neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu>0$ tel que pour tout $x\in[-\nu,\nu]$, $f(x)$ a même signe que a_0.
2. On suppose que $a_0=0$ et $a_1\neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu>0$ tel que pour tout $x\in[-\nu,\nu]$, $f(x)$ a même signe que a_1x.
3. On suppose que $a_0=a_1=0$ et $a_2\neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu>0$ tel que pour tout $x\in[-\nu,\nu]$, $f(x)$ a même signe que a_2x^2.
4. Que peut-on dire du signe de f au voisinage de 1 ?

Exercice 3.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$. Démontrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 3.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 3.8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.9. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $|f|$ (qui à x associe $|f(x)|$) l'est également.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 3.10. Un marcheur parcourt six kilomètres en une heure (il ne marche pas forcément à vitesse constante). Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il marche exactement trois kilomètres.

Exercice 3.11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x \text{ si } x \leqslant 1 \\ ax+b \text{ si } x > 1. \end{cases}$
Déterminer a, b pour que f soit dérivable en 1, puis faire l'étude de f et tracer son graphe.

Exercice 3.12. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
1. Donner son domaine de définition D_f. La fonction est elle continue ? Dérivable ?
2. Calculer f' et donner le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 3.13. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f s'annule en au moins n points. Montrer que f' s'annule en au moins $n-1$ points.

Exercice 3.14. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l.$$

Montrer que f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = l$.

Exercice 3.15. Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés de base de la fonction exponentielle en partant d'une de ses définitions possibles.

$$\exp \textit{ est l'unique fontion définie sur } \mathbb{R}\textit{, vérifiant } \exp' = \exp \textit{ et } \exp(0) = 1.$$

On admettra que exp est positive.

1. Soit s in $\mathbb{R}$. En considérant la fonction $f(t) = \frac{\exp(t+s)}{\exp(s)}$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $exp(t+s) = \exp(t)\exp(s)$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(-t) = \frac{1}{\exp(t)}$.
2. Montrer que exp est croissante, en déduire que pour tout $t \geqslant 0$, $\exp(t) \geqslant t$. En déduire les limites de exp en $\pm\infty$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n(x) = \frac{\exp(x)}{x^{n+1}}$. Montrer que f_n est croissante sur $[n, \infty[$. En déduire la limite de $\frac{\exp x}{x^n}$ en $+\infty$.