Université Paul Sabatier, **Licence L1PS**
Année 2015-2016

DM1

Nombres complexes, homographies.

Dans ce problème, on considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On identifiera $\mathcal{P}$ avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, via l'identification $(x, y) \mapsto x + iy$.

1 Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{C}$.

1. Soient, $\vec{u}, \vec{w}$ des vecteurs d'affixes u, w. Justifier que :

a. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $u\overline{w} - \overline{u}w = 0$.

On suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires. Si $w = 0$ alors on a bien $u\overline{w} - u\overline{w} = 0$. On suppose maintenant que $w \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda w$. On a alors

$$u\overline{w} - \overline{u}w = u\overline{\lambda u} - \overline{u}\lambda u = u\lambda\overline{u} - \overline{u}\lambda u = 0.$$

Inversement, suppposons que $u\overline{w} - \overline{u}w = 0$. Si $w = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont bien colinéaires. On suppose maintenant que $w \neq 0$ et on note $\lambda = \frac{u}{w}$. Puisque $u\overline{w} - \overline{u}w = 0$ on a

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{u}}{\overline{w}} = \frac{u}{w} = \lambda.$$

Cela signifie que λ est réel, et donc que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires. Finalement on obtient bien que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et seulement si $u\overline{w} - \overline{u}w = 0$.

Commentaires :
- *Attention, vous avez presque tous dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{w}$, en oubliant le cas où $\overrightarrow{w} = 0$ mais $\overrightarrow{u} \neq 0$.*
- *Cette distinction de cas rendait plus difficile un raisonnement par équivalence. Dans ce cas, il est plus prudent de montrer séparément les deux implications.*
- *Il était possible d'utiliser la caractérisation de vecteurs colinéaires en utilisant les coordonnées : Si $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{w} = (x', y')$ alors*

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad xy' - x'y = 0.$$

- *Toutes ces remarques valent aussi pour la question suivante.*

$\square$

b. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $u\overline{w} + \overline{u}w = 0$.

On suppose que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux. Si $w = 0$ alors on a bien $u\overline{w} + u\overline{w} = 0$. On suppose maintenant que $w \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = i\lambda w$. On a alors

$$u\overline{w} + \overline{u}w = -iu\overline{\lambda u} + i\overline{u}\lambda u = 0.$$

Inversement, suppposons que $u\overline{w} + \overline{u}w = 0$. Si $w = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont bien colinéaires. On suppose maintenant que $w \neq 0$. Alors on a

$$\frac{u}{w} = -\frac{\overline{u}}{\overline{w}}.$$

On note maintenant $\lambda = i\frac{\overline{u}}{\overline{w}}$. Comme précédemment λ est réel. Puisque $u = i\lambda w$, cela prouve que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux. Finalement on obtient bien que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $u\overline{w} + \overline{u}w = 0$. $\square$

2. Donner une équation de la forme $\overline{a}z + a\overline{z} = b$ pour une droite D passant par un point d'affixe z_0 et orthogonale à un vecteur d'affixe $u \neq 0$. Préciser les paramètres a, b en fonction de u, z_0. *Indication :* On pourra utiliser la question 1-b. *Attention :* "Équation de droite" signifie que z est sur la droite *si et seulement si* il vérifie l'équation.

Le point d'affixe z est sur la droite D si et seulement si le vecteur d'affixe $(z - z_0)$ est orthogonal au vecteur d'affixe u. D'après la question précédente, c'est le cas si et seulement si

$$(z - z_0)\overline{u} + (\overline{z} - \overline{z_0})u = 0,$$

soit

$$z\overline{u} + \overline{z}u = z_0\overline{u} + \overline{z_0}u.$$

On obtient bien une equation de la forme $\overline{a}z + a\overline{z} = b$ avec $a = u$ et $b = z_0\overline{u} + \overline{z_0}u$. □

3. Réciproquement, soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que les solutions de l'équation $\overline{u}z + u\overline{z} = b$ forment une droite dans le plan complexe.

On note D l'ensemble des solutions de l'équation $\overline{u}z + u\overline{z} = b$. On note

$$z_0 = \frac{bu}{2\,|u|^2}.$$

On a alors $z_0 \in D$. En particulier D n'est pas vide. Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$z \in D \Leftrightarrow \overline{u}z + u\overline{z} = \overline{u}z_0 + u\overline{z_0} \Leftrightarrow \overline{u}(z - z_0) + u(\overline{z} - \overline{z_0}) = 0.$$

Ainsi $z \in D$ si et seulement si le vecteur d'affixe $(z - z_0)$ est orthogonal au vecteur d'affixe u. Cela définit bien une droite du plan. □

4. Justifier que $b = 0$ si et seulement si la droite passe par 0.

La droite D passe par 0 si et seulement si $z = 0$ est solution de l'équation $\overline{u}z + u\overline{z} = b$. C'est le cas si et seulement si $b = 0$. □

5. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe c et de rayon $R > 0$. Donner une équation caractérisant $\mathcal{C}$, en fonction de $z, \overline{z}, c, R$. *Indication :* L'équation cherchée ressemble à l'équation donnée à la question suivante. On pourra écrire que le carré de la distance au centre est égal à R^2.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors z appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre c et de rayon R si et seulement si

$$|z - c|^2 = R^2.$$

Or

$$|z - c|^2 = z\overline{z} - z\overline{c} - \overline{z}c + c\overline{c}.$$

Notant $a = -c$ et $b = c\overline{c} - R^2$, on obtient que z appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0.$$

□

6. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que si $|a|^2 - b > 0$ alors

$$z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$$

est l'équation d'un cercle. Préciser son centre et son rayon en fonction de a et b. Que se passe-t-il si $|a|^2 - b \leq 0$? Que peut on dire si $b = 0$?

On suppose que $|a|^2 - b > 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors d'après le calcul précédent on a

$$z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z + a|^2 = |a|^2 - b.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est le cercle de centre $-a$ et de rayon $\sqrt{|a|^2 - b}$. Le calcul précédent est encore valable si $|a|^2 - b \leq 0$. Si $|a|^2 - b = 0$, la seule solution est $-a$. Si $|a|^2 - b < 0$, l'équation n'a alors aucune solution. Enfin on observe que si $b = 0$ alors 0 est solution de l'équation, ce qui signifie qu'on a l'équation d'un cercle passant par 0 (en fait, le cercle de centre $-a$ et de rayon $|a|$, qui passe effectivement par 0). □

2 Homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$.

On considère l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenu en ajoutant à l'ensemble des nombres complexes un élément, noté par convention ∞.

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. Une *homographie* h de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une application

$$\begin{array}{rccl} h: & \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a/c & \text{si } z = \infty \ (h(\infty) = \infty \text{ si } c = 0.) \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

On remarquera qu'un homographie peut se définir uniquement par l'expression $\frac{az+b}{cz+d}$ en utilisant les conventions suivantes : pour $m \in \mathbb{C}$, $\frac{m}{\infty} = 0$ et $\frac{m}{0} = \infty$ si $m \neq 0$.

ATTENTION : La notation ∞ est purement conventionnelle, et ne correspond PAS à l'infini que vous avez peut-être vu au lycée. On n'utilisera donc RIEN DE PLUS à ce sujet que ce qui a été écrit ci-dessus.

Par convention, on appelle *droite* de $\widehat{\mathbb{C}}$ une droite de $\mathbb{C}$ auquel on a ajouté le point ∞, un *cercle* de $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de $\mathbb{C}$. *ATTENTION :* dans la suite, lorsqu'on parlera de droite de $\widehat{\mathbb{C}}$, il faudra bien distinguer la droite de $\mathbb{C}$, et le point ∞ ajouté.

Bien sûr, dans cette partie, on utilisera la partie 1.

1. Montrer que l'image d'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est une droite passant par 0.

On note Φ l'application qui à $z \in \hat{\mathbb{C}}$ associe $\frac{1}{z}$. On a $\Phi(0) = \infty$, $\Phi(\infty) = 0$ et Φ réalise une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Alors w est l'image par Φ d'un élément $z \in \mathbb{C}^*$ de la droite d'équation $\overline{a}z + a\overline{z} = 0$ si et seulement si

$$\frac{\overline{a}}{w} + \frac{a}{\overline{w}} = 0.$$

Or

$$\frac{\overline{a}}{w} + \frac{a}{\overline{w}} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\overline{w} + aw = 0.$$

On note $\alpha = \overline{a}$. Sachant que Φ échange 0 et ∞, on obtient que l'image par Φ de la droite d'équation $\overline{a}z + a\overline{z} = 0$ est la droite d'équation $\overline{\alpha}w + \alpha\overline{w} = 0$. C'est bien une droite passant par 0. □

2. Montrer que l'image d'une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ ne passant pas par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est un cercle.

Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Alors w est l'image par Φ d'un élément $z \in \mathbb{C}^*$ de la droite d'équation $\overline{a}z + a\overline{z} = b$ si et seulement si

$$\frac{\overline{a}}{w} + \frac{a}{\overline{w}} = b,$$

soit

$$\overline{a}\overline{w} + aw = bw\overline{w},$$

ou encore

$$w\overline{w} - \frac{\overline{a}}{b}\overline{w} - \frac{a}{b}w = 0.$$

On note $\alpha = -\frac{\overline{a}}{b}$. Alors l'image par Φ de la droite d'équation $\overline{a}z + a\overline{z} = b$ (qui contient ∞ mais pas 0) est le cercle d'équation $w\overline{w} + \alpha\overline{w} + \overline{\alpha}w = 0$. C'est un cercle (ne contient donc pas ∞) passant par 0. □

3. Montrer que l'image d'un cercle passant par 0 par l'homographie $z \to 1/z$ est une droite ne passant pas par 0.

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Alors w est l'image par Φ d'un élément $z \in \mathbb{C}^*$ du cercle d'équation $z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$ si et seulement si

$$\frac{1}{w\overline{w}} + \frac{\overline{a}}{w} + \frac{a}{\overline{w}} = 0,$$

soit

$$1 + \overline{aw} + aw = 0.$$

Ainsi l'image par Φ du cercle d'équation $z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$ (qui contient 0 mais pas ∞) est la droite d'équation $1 + \overline{aw} + aw = 0$ (elle contient ∞ mais pas 0). □

4. Montrer que l'image d'un cercle ne passant pas par 0 par l'homographie $z \mapsto 1/z$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon en fonction du centre et du rayon du cercle initial.

Soient $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre c et de rayon $R > 0$. Une équation de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$z\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + |c|^2 = R^2.$$

Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Alors $w \in \Phi(\mathcal{C})$ si et seulement si

$$\frac{1}{w\overline{w}} - \frac{\overline{c}}{w} - \frac{c}{\overline{w}} + |c|^2 = R^2,$$

soit

$$1 - \overline{cw} - cw + (|c|^2 - R^2)w\overline{w} = 0,$$

ou encore, puisque $|c|^2 - R^2 \neq 0$

$$w\overline{w} - \frac{\overline{c}}{|c|^2 - R^2}\overline{w} - \frac{c}{|c|^2 - R^2}w + \frac{1}{|c|^2 - R^2} = 0$$

On en déduit que $\Phi(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\frac{\overline{c}}{|c|^2 - R^2}$ et de rayon $\frac{R}{(|c|^2 - R^2)}$. □

5. Déduire des questions précédentes que l'image d'une droite ou d'un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie est une droite ou un cercle. *Indication : Si $c \neq 0$, et $cz + d \neq 0$, on remarquera que* $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$.

On rappelle qu'une similitude envoie une droite sur une droite et un cercle sur un cercle. Si $c = 0$, alors $d \neq 0$ et l'homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est une similitude. On suppose maintenant que $c \neq 0$. Comme indiqué, on observe que pour tout $z \neq -\frac{d}{c}$

$$\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

L'égalité reste vraie dans $\hat{\mathbb{C}}$ pour $z = -\frac{d}{c}$. Ainsi l'homographie est la composée de $\sigma_1 \circ \Phi \circ \sigma_2$ où σ_2 est la similitude $z \mapsto cz + d$ et σ_1 est la similitude $Z \mapsto \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)Z$. D'après les questions précédentes, ces trois applications (et donc leur composée) envoie un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite. □

6. On considère par la suite l'homographie définie par $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

a. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ et de $i\mathbb{R}$ par h.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|h(x)|^2 = \left|\frac{x - i}{x + i}\right|^2 = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Cela prouve que l'image de $\mathbb{R}$ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1. Puisque l'image d'une droite de $\hat{\mathbb{C}}$ est un cercle ou une droite, c'est exactement le cercle $\mathcal{C}$.

De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$h(iy) = \frac{y - 1}{y + 1},$$

donc l'image de $i\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas on a considéré les droites de $\hat{\mathbb{C}}$ (c'est-à-dire contenant ∞). □

b. Dessiner l'image du premier quadrant $\{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par h.

Plus généralement, pour $x, y \in \mathbb{R}$ on observe que

$$|h(x+iy)|^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)} < 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 < (y+1)^2 \Leftrightarrow -2y < 2y \Leftrightarrow y > 0,$$

et d'autre part

$$\Im(h(x+iy)) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{x^2+(y+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ainsi l'image par h du quadrant $\{x+iy \,|\, x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est le demi-disque $\{x+iy \,|\, x^2+y^2 < 1 \text{ et } y < 0\}$. □

Commentaires généraux :

- *On ne divise par 0. Vous le savez tous, et avez quasiment tous fait l'erreur. Quand on doit vraiment diviser par une quantité qui peut être nulle, on distingue deux cas : le cas où la quantité est non nulle (et alors on peut poursuivre le calcul comme prévu) et à part le cas où cette quantité est nulle (en génŕal c'est un cas simple).*
- *C'est lié à la remarque précédente : toutes les droites n'admettent pas une équation de la forme $y = ax+b$. Soit on distingue le cas d'une droite verticale, soit (et c'est bien plus simple) on utilise la forme plus générale $ax+by+c = 0$.*
- *Attention à l'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$: dans 99%, il a été utilisé à mauvais escient. Les problèmes de logique avec ce symbole sont parfois subtiles. D'ailleurs, de façon générale, raisonner par équivalence est très dangereux. Ici plusieurs questions s'y prettaient, mais à condition d'être très prudents.*
- *La notion d'image d'un ensemble par une fonction a souvent été mal gérée (mais on en a peu parlé et on y reviendra). Pour montrer que l'ensemble F est l'image de l'ensemble E par l'application f, il faut montrer que f envoie tout élément de E sur un élément de F, et que tout élément de F admet un antécédent dans E par f.*

□