Mathématiques

Contrôle Continu n°2 - mardi 12 janvier 2016

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Le sujet est long, mais le barème sera adapté. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P = 2X^5 + X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 1$ et $Q = X^4 - 1$.
1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q.
2. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{2X^5 + X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 1}{X^4 - 1}.$$

4. Donner une primitive sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto F(x) = \frac{2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - 1}.$$

5. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$Q(x)y'(x) + P(x)y(x) = P(x).$$

Correction : **1.** On a :

$$P(X) = 2XQ(X) + X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 2X - 1 = (2X + 1)Q + 4X^3 + 2X^2 + 2X.$$

2. 1, -1, i et $-i$ sont racines de Q dans $\mathbb{C}$. Puisque Q est de degré 4, on a dans $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$$

Dans le terme de droite, tous les facteurs sont dans $\mathbb{R}[X]$. En outre ils sont unitaires et de degré 1 ou de degré 2 sans racine. Il s'agit donc de la décomposition en éléments simples de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
3. D'après les questions 1 et 2 on a

$$F = 2X + 1 + \frac{4X^3 + 2X^2 + 2X}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)}.$$

Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{4X^3 + 2X^2 + 2X}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}.$$

Il y a plusieurs façons de déterminer ces coefficients. En multipliant cette égalité par $X - 1$ et en l'évaluant en 1, on obtient que a vaut 2. De même, en multipliant cette égalité par $X + 1$ et en l'évaluant en -1, on obtient que b vaut 1. Considérant l'égalité ci-dessus comme une égalité entre fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$, on la muliplie par $X-i$ et on l'évalue en i. On obtient que

$$\frac{ci+d}{2i}=\frac{1+i}{2}.$$

Ainsi $c=d=1$. Finalement la décomposition de F en éléments simples s'écrit

$$F=2X+1+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{X+1}{X^2+1}.$$

4. D'après la question précédente on a pour tout $x\in]1,+\infty[$

$$f(x)=2x+1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}.$$

Une primitive de f est donc donnée par

$$\varphi : x\mapsto x^2+x+2\ln(x-1)+\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x).$$

5. Les solutions de l'équation homogène

$$Q(x)y'(x)+P(x)y(x)=0$$

sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto Ce^{-\varphi(x)},$$

avec $C\in\mathbb{R}$. Puisque la fonction constante égale à 1 est solution particulière, les solutions sont finalement les fonctions de la forme

$$y : x\mapsto Ce^{-\varphi(x)}+1,$$

avec $C\in\mathbb{R}$.

Commentaires :

- Quand vous écrivez $Q(X)=(X^2+1)(X-1)(X+1)$, il faut préciser pourquoi c'est bien la décomposition en éléments simples de Q.
- Lorsque vous appliquez le théorème de décomposition en éléments simples, attention à bien mettre de côté la partie entière ($2X+1$ ici).

Exercice 2. Soit I un intervalle et $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soient $a,b\in I$ avec $a<b$. On suppose que $f'(a)<f'(b)$. Soit $\lambda\in]f'(a),f'(b)[$.
1. Montrer que si f' est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\lambda$.
En considérant par exemple la fonction définie pour $x\in\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0,\\ 0 & si\ \ x=0,\end{cases}$$

on peut montrer que f' n'est pas continue en général (question bonus : le démontrer). Le but de cet exercice est maintenant de montrer que même si f' n'est pas continue il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\lambda$.
2. Pour $x\in I$ on note $g(x)=f(x)-\lambda x$. Justifier qu'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que g admet un minimum en x_0.
3. Montrer que $x_0\in]a,b[$ *(indication : on pourra commencer par calculer $g'(a)$ et $g'(b)$).*
4. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\lambda$.
5. Que peut-on dire si $f'(a)>f'(b)$?
6. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Correction : **1.** On suppose que f' est continue. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f' il existe bien $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\lambda$.
Question Bonus. On note φ la fonction définie par l'énoncé. On montre que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée φ' n'est pas continue en 0. La fonction $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions dérivables. Ainsi φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions dérivables. En outre pour $x\in\mathbb{R}^*$ on a

$$\varphi'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part pour $h\neq 0$ on a

$$\left|\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}\right|=\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right|\leqslant|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Cela prouve que φ est dériable en 0 de dérivée nulle. On a donc montré que φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On suppose par l'absurde que φ' est continue en 0, ce qui signifie que

$$\varphi'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$ on a $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$. D'autre part, si $|x| \leqslant \frac{1}{6}$ on a

$$\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

On note $\delta_1 = \min\left(\delta, \frac{1}{6}\right)$. Pour $x \in [-\delta_1, \delta_1]$ on a alors par l'inégalité triangulaire

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |\varphi'(x)| + \left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \frac{2}{3}.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \frac{1}{2\pi\delta_1}$. On note $x = \frac{1}{2\pi n}$. Alors on a $x \in [0, \delta_1]$ et

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |\cos(2\pi n)| = 1,$$

ce qui donne une contradiction. Par l'absurde on obtient que φ' n'est pas continue en 0 (N.B. : ce raisonnement sera bien plus simple à écrire au second semestre en utilisant les suites et plus particulièrement le critère séquentiel de continuité). Ainsi une fonction peut être dérivable sur un intervalle sans que sa dérivée ne soit continue sur cet intervalle.

2. La fonction g est continue sur le segment $[a, b]$ comme différence de fonctions continues. Ainsi g est bornée et atteint ses bornes (en particulier son minimum) sur $[a, b]$.

3. La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ comme différence de fonctions dérivables. En outre on a

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0.$$

On suppose par l'absurde que g atteint son minimum en a. Alors pour tout $x \in]a, b]$ on a

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite ($x \to a$) on obtient que $g'(a) \geqslant 0$. D'où la contradiction. Donc g n'atteint pas son minimum en a. On montre de façon analogue que g n'atteint pas son minimum en b. Ainsi x_0 est nécessairement dans $]a, b[$.

4. Puisque $x_0 \in]a, b[$, g est dérivable en x_0 et g atteint son minimum en x_0, on a $g'(x_0)$. Notant $c = x_0$, on a donc $f'(c) = \lambda$.

5. Si $f'(a) > f'(b)$ on considère la fonction $\tilde{f} : x \mapsto -f(x)$. Alors on a $\tilde{f}'(a) = -f'(a) < -f'(b) = \tilde{f}'(b)$. D'après le raisonnement précédent appliqué à $\tilde{f}$ et $-\lambda \in]\tilde{f}'(a), \tilde{f}'(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $-f'(c) = \tilde{f}'(c) = -\lambda$, soit $f'(c) = \lambda$.

6. D'après ce qui précède, une fonction qui ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires ne peut pas être une dérivée. On considère par exemple sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $F' = f$. On a alors $F'(-1) = 0$ et $F'(1) = 1$. D'après ce qui précède il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f(c) = F'(c) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Cela prouve que f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

<u>Commentaires :</u>

- Faites attention en lisant l'énoncé. La question 1 est indépendante des autres (à la question 1 on suppose que f' est continue, et ensuite on cherche à retrouver le même résultat sans cette hypothèse). Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$. On ne peut pas utiliser ce résultat pour répondre aux questions intermédiaires. De même, dans les questions 2 et suivantes, la fonction f est abstraite, il ne s'agit pas de la fonction particulière évoquée en contre-exemple auparavant.
- Il n'est pas vrai que g admet un minimum en x_0 si et seulement si $g'(x_0)$. Et il n'y a même pas implication. On ne peut dire que la dérivée s'annule en un minimum que s'il est atteint à l'intérieur de l'intervalle (d'où l'intérêt de la question 3). Pour vous convaincre du problème, prenez par exemple la fonction $x \mapsto x$ sur [0,1]. Sa dérivée ne s'annule jamais et pourtant elle admet un minimum (en 0) et un maximum (en 1).
- Vu comment l'exercice est posé, il est assez clair que la dernière question est une conséquence du résultat de l'exercice. Il faut donc l'utiliser. Notez que ce n'est pas parce que vous ne savez pas expliciter une primitive d'une fonction qu'elle n'en a pas. Vous verrez en particulier que toute fonction continue admet des primitives. En particulier les fonctions « compliquées » telles que $x \mapsto x^x$ ou arctan ont bien des primitives sur leurs domaines de définition.

Exercice 3. Pour $t \in [-\pi, \pi]$ on note

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{2} - \sin(t) \quad \text{et} \quad y(t) = 1 - \cos(2t).$$

On considère alors la courbe paramétrée

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
2. En déduire que la courbe admet un point singulier (ou stationnaire) pour $t = 0$. Préciser sans calcul la tangente à γ en 0 et le type de singularité.
3. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ les points $\gamma(t)$ et $\gamma(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Écrire le tableau conjoint de variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, \pi]$.
5. Tracer la courbe γ.

Correction : **1.** On rappelle que

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \underset{\theta \to 0}{o}(\theta^3)$$

et

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \underset{\theta \to 0}{o}(\theta^3).$$

On obtient alors

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(2t - \frac{8t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)\right) = -\frac{t^3}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$$

et

$$y(t) = 1 - \left(1 - \frac{4t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)\right) = 2t^2 + \underset{t \to 0}{o}(t^3).$$

2. D'après la question précédente on a

$$\gamma(t) = (0, 2)t^2 + \left(-\frac{1}{2}, 0\right)t^3 + \underset{t \to 0}{o}(t^3),$$

donc le point de paramètre 0 est un point singulier. C'est un point de rebroussement de première espèce, et la tangente en ce point est l'axe des ordonnées.
3. Pour $t \in [0, \pi]$ on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc les points $\gamma(-t)$ et $\gamma(t)$ sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc restreindre l'étude de γ à l'intervalle $[0, \pi]$.
4. Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $[0, \pi]$. En outre pour $t \in [0, t]$ on a

$$x'(t) = \cos(2t) - \cos(t)$$

et

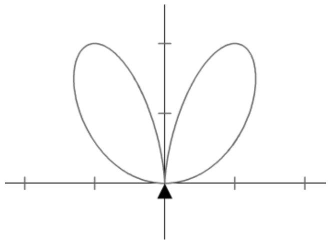
$$y'(t) = 2\sin(2t).$$

Soit $t \in [0, \pi]$. Puisque t et $2t$ sont dans $[0, 2\pi]$ on a

$$\cos(2t) = \cos(t) \iff 2t - \pi = \pi - t \iff t = \frac{2\pi}{3}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0



5. On obtient la figure suivante (sur laquelle il faut ajouter les coordonnées des points particuliers et indiquer les tangentes particulières) :

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si $f'(x)+f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors f tend vers 0 en $+\infty$.
Le but de l'exercice est maintenant d'obtenir la même conclusion en supposant seulement que

$$f'(x)+f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$ on note $g(x)=e^x f(x)$.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.
3. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\geqslant A$ on a

$$-\frac{\varepsilon e^x}{2}\leqslant g'(x)\leqslant\frac{\varepsilon e^x}{2}$$

4. Montrer que pour tout $x\geqslant A$ on a alors

$$g(x)-g(A)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(e^x-e^A)$$

(indication : on pourra s'intéresser à la fonction $x\mapsto g(x)-\frac{\varepsilon}{2}e^x$). On admet qu'on peut vérifier de la même façon que

$$g(x)-g(A)\geqslant-\frac{\varepsilon}{2}(e^x-e^A).$$

En déduire que pour $x\geqslant A$ on a

$$|g(x)-g(A)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(e^x-e^A).$$

5. Montrer que

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Correction : **1.** Puisque f est solution de l'équation différentielle $f'+f=0$, il existe $C\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=Ae^{-x}.$$

Ainsi on a bien

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

2. g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$g'(x)=(f'(x)+f(x))e^x.$$

3. Par hypothèse on a

$$e^{-x}g'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0,$$

donc il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\geqslant A$ on a

$$\left|e^{-x}g'(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x \geqslant A$ on obtient alors
$$-\frac{\varepsilon e^x}{2} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon e^x}{2}$$
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note
$$h(x) = g(x) - \frac{\varepsilon}{2} e^x.$$
Cela définit une fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \geqslant A$ on a
$$h'(x) = g'(x) - \frac{\varepsilon}{2} e^x \leqslant 0.$$
Cela prouve que $h(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant A$, et donc $h(x) \leqslant h(A)$. Cela prouve que
$$g(x) - g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A).$$
Puisqu'on a également
$$g(x) - g(A) - \geqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$
on a finalement
$$|g(x) - g(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A).$$
5. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x}, on obtient pour $x \geqslant A$
$$\left|f(x) - e^{-x} g(A)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x}$$
puis, par l'inégralité triangulaire
$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + e^{-x}\,|g(A)| - \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + e^{-x}\,|g(A)|$$
Comme $e^{-x} g(A) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il existe $B \geqslant A$ tel que pour tout $x \geqslant B$ on a $e^{-x}\,|g(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour $x \geqslant B$ on a
$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$
Finalement, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ on a trouvé $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant B$ on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que f tend vers 0 en $+\infty$.