Contrôle n°1 de mathématiques

5 novembre 2015. Durée : 2h

Calculatrices, documents et téléphones portables interdits.

Exercice 1 En calculant $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ de deux façons différentes, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappeler les dérivées des fonctions $x \mapsto \cos(\lambda x)$ et $x \mapsto \sin(\lambda x)$.
2. Linéariser $\cos^3(x)$, et en déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$.
3. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - \cos^3(x)y(x) = 2\cos^3(x)$$

Exercice 3 Résoudre l'équation

$$y'' + y' + y = e^x.$$

Tournez la page SVP

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit $n \geq 2$. On considère l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n \tag{$*$}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Par un argument géométrique, montrer que toute solution de $(*)$ est imaginaire pure.
2. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi\,[2\pi]$ on a

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

4. Résoudre $(*)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$

Soient f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que f tend vers l en $+\infty$. On rappelle que cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

1. Soient g une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers $m \in \mathbb{R}$ en ∞. Montrer que

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} l + m.$$

   (*il s'agit de démontrer un résultat énoncé en cours*)
2. On suppose désormais que f est continue à valeurs dans $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
   (a) Montrer que f admet un maximum.
   (b) En donnant un contre-exemple, montrer que f n'admet pas nécessairement de minimum.