Calcul Différentiel et Intégral

Examen partiel - Lundi 03 novembre 2014

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note

$$f(x,y,z) = \big(\cos(xy)\cos(z), (1+x^2)^{yz}\big).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction f est différentiable au point $(x,1,0)$ et donner sa différentielle.

Exercice 2. Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f : (x,y) \mapsto \frac{xy^4}{x^4+y^6} \quad ; \quad g : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}.$$

Peuvent-elles être prolongées par continuité en (0,0) ?

Exercice 3. Déterminer les extremas locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

(i) $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$,

(ii) $g : (x,y) \mapsto e^{-|x|-y^2}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ calculer

$$\Delta f(a,a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a).$$

Exercice 5. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = (x^3 + 3xe^y, y).$$

1. Montrer que f réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la matrice jacobienne de sa réciproque f^{-1} au point $(1+3e^2, 2)$.

Exercice 6. Soient $c > 0$ et f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

si et seulement s'il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad f(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

Corrigé

Exercice 1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$f(x, y, z) = \left(\cos(xy)\cos(z), e^{yz\ln(1+x^2)}\right).$$

f est bien définie car $1 + x^2 > 0$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$. Par compositions et produits de fonctions polynômiales avec les fonctions cos, ln et exp, on obtient que f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. En particulier elle est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la différentielle de f au point $(x, 1, 0)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à $h = (h_x, h_y, h_z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$h_x \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1, 0) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(x, 1, 0) + h_z \frac{\partial f}{\partial z}(x, 1, 0) = \left(-h_x \sin(x) - h_y x \sin(x), h_z \ln(1 + x^2)\right).$$

Exercice 2. **1.** La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. De même le numérateur de l'expression définissant g est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions $(x, y) \mapsto |x|$ et $(x, y) \mapsto |y|$ sont continues comme composées des fonctions coordonnées avec la fonction valeur absolue. En outre $|x|+|y|$ ne s'annule que pour $(x, y) = (0, 0)$, donc g est bien continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}\right)$. Alors u_n tend vers $(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$ et d'autre part

$$f(u_n) = \frac{n^{-11}}{2n^{-12}} = \frac{n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Cela prouve que f ne peut pas être prolongée par continuité en $(0, 0)$.

Pour g on observe que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$|g(x, y)| = \frac{x^2}{|x| + |y|} + \frac{y^2}{|x| + |y|} \leqslant |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Ainsi g tend vers 0 en (0,0), donc on obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant $g(0, 0) = 0$.

Exercice 3. **1.** La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4x^3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = -y \\ 4x^3 - 8x = 0 \end{cases}$$

Finalement les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\det(\operatorname{Hess} f(x, y)) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}.$$

On a $\det(\operatorname{Hess} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) > 0$ et $\operatorname{Tr}(\operatorname{Hess} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) > 0$, donc f atteint un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. De même f atteint un minimum local en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

On a $\det(\operatorname{Hess} f(0, 0)) = 0$, donc le développement limité à l'ordre 2 ne permet pas de conclure en (0,0). Mais on observe que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a $f(t, t) = 2t^4 > 0 = f(0, 0)$, ce qui prouve que f n'admet pas de maximum local en (0,0). D'autre part $f(0, t) = t^4 - 2t^2 = t^2(t^2 - 2)$ est strictement négatif pour $t \in]0, \sqrt{2}[$, ce qui prouve que f n'admet pas de minimum local en (0,0). Ainsi f n'admet pas d'extremum local en (0,0). Finalement f admet deux extremums locaux (qui sont des minimums) en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme composée des fonctions exponentielle et de la fonction polynômiale $(x, y) \mapsto x + y^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -e^{-x-y^2} \\ -2ye^{-x-y^2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ainsi g n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ on a $g(x, y) = e^{x-y^2}$ et on obtient de la même façon que g n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$. Ainsi, si g admet un extremum local en (x, y), on a nécessairement $x = 0$.

D'autre part, la dérivée partielle de g par rapport à y existe en tout point de $\mathbb{R}^2$. Si g admet un extremum local en (x, y) alors en particulier la fonction $t \mapsto g(x, t)$ admet un extremum local en y, et donc $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$, ce qui implique que $y = 0$. Ainsi g ne peut admettre un extremum local qu'en (0,0). Mais il est facile de voir que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a

$$g(x, y) < 1 = g(0, 0).$$

Finalement, g admet un unique extremum local en (0,0). Il s'agit d'un maximum local (en fait, un maximum global strict).

Exercice 4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

En dérivant par rapport à y on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2 f(x, y) = -\partial_1 f(y, x). \tag{$*$}$$

En dérivant à nouveau par rapport à y on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(\partial_2 f)(x, y) = -\partial_1(\partial_1 f)(y, x),$$

et donc pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\Delta f(a, a) = \partial_1(\partial_1 f)(a, a) + \partial_2(\partial_2 f)(a, a) = 0.$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(\partial_2 f)(x, y) = -\partial_2(\partial_1 f)(y, x).$$

Comme f est de classe C^2 on a $\partial_1(\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1 f)$ et donc pour $a \in \mathbb{R}$: $\partial_1(\partial_2 f)(a, a) = -\partial_2(\partial_1 f)(a, a)$. Cela implique que $\partial_1(\partial_2 f)(a, a) = 0$.

Exercice 5. **1.** La fonction f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car chaque coordonnée est obtenue comme somme de produits de fonctions polynômiales et exponentielles. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\det \operatorname{Jac} f(x, y) = \begin{vmatrix} 2x^2 + 3e^y & 3xe^y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 + 3e^y > 0.$$

Montrons que f est bijective. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x, y) = (u, v) \quad \iff \quad \begin{cases} y = v \\ x^3 + 3xe^v = u \end{cases}$$

Or l'application $x \mapsto x^3 + 3xe^v$ est continue, strictement croissante, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, donc il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 + 3xe^v = u$. Cela prouve

que f est bijective. Par le théorème de l'inversion globale, on obtient donc que f réalise un difféomorphisme de classe C^1 (en fait de classe C^∞) de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. On a

$$\operatorname{Jac}(f^{-1})(f(1,2)) = \left(\operatorname{Jac} f(1,2)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2+3e^2 & 3e^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+3e^2}\begin{pmatrix} 1 & -3e^2 \\ 0 & 2+3e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

Alors f est de classe C^2 comme somme de composées de fonctions de classe C^2 et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = c\varphi'(x+ct) - c\psi'(x-ct),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = c^2\varphi''(x+ct) + c^2\psi''(x-ct),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \varphi'(x+ct) + \psi'(x-ct)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \varphi''(x+ct) + \psi''(x-ct).$$

Ainsi on a bien

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

Inversement, supposons que f est une fonction de classe C^2 qui vérifie cette équation. Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$g(u,v) = f\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right).$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a alors

$$f(x,y) = g(x+ct, x-ct). \tag{$**$}$$

La fonction g est de classe C^2 comme composée de f avec la fonction $(u,v) \mapsto \left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right)$. Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = -\frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right) = 0.$$

Cela prouve que $\partial_v g$ ne dépend pas de u, donc pour tout v il existe $\zeta(v)$ tel que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \zeta(v).$$

Cela implique que ζ est une fonction de classe C^1. Soit ψ une primitive de ζ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on prend une primitive de l'égalité précédente par rapport à v. On obtient qu'il existe une constante $\varphi(u)$ telle que

$$g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v).$$

Alors φ et ψ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et d'après ($**$) on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

$\boxed{\text{Commentaires}}$

- La différentielle d'une fonction n'est pas la somme de ses dérivées partielles. Différentielle et dérivées partielles ne sont même pas de même nature !
- Attention aux fonctions qui font intervenir une variable dans une puissance.
- L'application $(x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ n'est pas une fraction rationnelle.