Réduction de Dunford et de Jordan

On commence par rappeler (et compléter) le lemme des noyaux. Ensuite on donne une deuxième démonstration pour le théorème de Dunford et on complète la démonstration pour la réduction de Jordan.

On rappelle que K est un corps, E est un K-espace vectoriel de dimension finie, et u est un endomorphisme de E.

Lemme (Lemme des noyaux)**.** *Soit $u \in L(E)$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_k$. Alors on a :*

$$\ker\big(P(u)\big) = \ker\big(P_1(u)\big) \oplus \dots \oplus \ker\big(P_k(u)\big).$$

En outre pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ le projecteur $\psi_j \in L(\ker(P(u)))$ de $\ker(P(u))$ sur $\ker(P_j(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{l \neq j} \ker(P_l(u))$ est un polynôme en u.

Démonstration. • On commence par supposer que $k = 2$. Soient alors $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$.

• Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$. On a

$$x = Q_1(u)\big(P_1(u)(x)\big) + Q_2(u)\big(P_2(u)(x)\big) = Q_1(u)(0) + Q_2(u)(0) = 0$$

donc $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$.

• Soit $x \in \ker(P_1(u))$. Alors on a

$$P(u)(x) = P_2(u)\big(P_1(u)x\big) = P_2(u)(0) = 0.$$

Cela prouve que $\ker(P_1(u)) \subset \ker(P(u))$. De même $\ker(P_2(u)) \subset \ker(P(u))$, et donc

$$\ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)) \subset \ker(P(u)).$$

• Inversement, on considère $x \in \ker(P(u))$. On note $x_1 = Q_1(u)\big(P_1(u)(x)\big)$ et $x_2 = Q_2(u)\big(P_2(u)(x)\big)$. On a $x = x_1 + x_2$. D'autre part

$$P_1(u)(x_2) = Q_2(u)\big(P(u)(x)\big) = 0,$$

donc $x_2 \in \ker(P_1(u))$. De même on a $x_1 \in \ker(P(u))$. On a donc prouvé que

$$\ker(P(u)) \subset \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)).$$

En outre les projections de $\ker(P(u))$ sur $\ker(P_1(u))$ parallèlement à $\ker(P_2(u))$ et sur $\ker(P_2(u))$ parallèlement à $\ker(P_1(u))$ sont $Q_2(u)$ et $Q_1(u)$ respectivement. Il s'agit de polynômes en u. Cela conclut la preuve si $k = 2$.

• Le lemme se prouve finalement par récurrence sur $k \geqslant 2$. On suppose que le résultat est vrai jusqu'au rang $k-1$ avec $k \geqslant 3$. On note $\tilde{P} = P_2 \dots P_k$. Alors P_1 et $\tilde{P}$ sont premiers entre eux, donc en appliquant le résultat déjà montré pour 2 et $k-1$ polynômes on obtient

$$\ker\big(P(u)\big) = \ker\big(P_1(u)\big) \oplus \ker\big(\tilde{P}(u)\big) = \ker\big(P_1(u)\big) \oplus \dots \oplus \ker\big(P_k(u)\big),$$

avec des projections qui sont des polynômes en u. D'où le résultat. $\square$

Théorème (Réduction de Dunford)**.** *On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in L(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotant, $d \circ n = n \circ d$ et $d + n = u$. En outre il existe $P_d, P_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d = P_d(u)$ et $n = P_n(u)$.*

Démonstration 1. • On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ les valeurs propres (distinctes) de u. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

D'après le lemme des noyaux on a

$$E = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker\big((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\big).$$

Pour $j \in [\![1,k]\!]$ on note $F_j = \ker\big((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\big)$ le sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ_j.

• Pour $j \in [\![1,k]\!]$ et $y_j \in F_j$ on pose

$$d(y_j) = \lambda_j y_j \quad \text{et} \quad n(y_j) = (u - \lambda_j)(y_j).$$

Par linéarité, cela définit des endomorphismes d et n de E. Plus précisément, pour $x \in E$ il existe $x_1 \in F_1$, …, $x_k \in F_k$ uniques tels que $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ et alors

$$d(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \quad \text{et} \quad n(x) = \sum_{j=1}^{k} (u - \lambda_j)(x_j).$$

En particulier on a bien

$$d(x) + n(x) = \sum_{j=1}^{k} u(x_j) = u(x),$$

et puisque les F_j sont stables par u :

$$\begin{aligned} d(n(x)) &= \sum_{j=1}^{k} d\big(\underbrace{(u - \lambda_j)(x_j)}_{\in F_j}\big) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (u - \lambda_j)(x) = \sum_{j=1}^{k} (u - \lambda_j)(\underbrace{\lambda_j x_j}_{\in F_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} n(d(x_j)) = n(d(x)). \end{aligned}$$

Enfin d est diagonalisable (il suffit de considérer une base de E obtenue en concaténant des bases de $F_1, \ldots, F_k$), et si on note $\alpha = \max_{1 \leqslant j \leqslant k}$ on a

$$n^{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{k} (u - \lambda_j)^{\alpha}(x_j) = 0,$$

car $x_j \in \ker((u - \lambda_j)^{\alpha_j}) \subset \ker((u - \lambda_j)^{\alpha_j})$. Donc n est nilpotent. Cela prouve l'existence d'un couple (d,n) vérifiant les conditions de l'énoncé.

- Supposons maintenant que le couple (d', n') vérifie également les conditions du théorème. Comme d' et n' commutent et $u = d' + n'$ on a

$$d' \circ u = d' \circ (d' + n') = (d' + n') \circ d' = u \circ d'.$$

Ainsi d' commute avec u, donc $F_j = \ker((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_j})$ est stable par d' pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. Puisque la restriction de d à F_j est $\lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$ on a $d|_{F_j} \circ d'|_{F_j} = d'|_{F_j} \circ d|_{F_j}$. Ceci étant valable sur F_j pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on obtient que d et d' commutent. Ces deux endomorphismes sont donc simultanément diagonalisables, ce qui implique que $d - d'$ est diagonalisable. Ainsi $n' - n = d - d'$ est diagonalisable. Comme $n = u - d$ et $n' = u - d'$ commutent, $n' - n$ est également nilpotent. Mais le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est 0, donc $n = n'$, puis $d = d'$. Cela prouve l'unicité.
- Enfin, d'après le lemme des noyaux, la projection π_j de E sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{i \neq j} F_i$ est un polynôme en u pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. Or $d = \sum_{j=1}^k \lambda_k \pi_j$, donc d puis $n = u - d$ sont des polynômes en u. □

On donne une deuxième démonstration pour ce théorème. Seule la preuve d'unicité est vraiment différente.

Démonstration 2. • On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ les valeurs propres (distinctes) de u. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

D'après le lemme des noyaux on a

$$E = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker\left((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\right).$$

Pour $j \in [\![1, k]\!]$ on note $F_j = \ker\left((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\right)$ le sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ_j.
- Montrons l'unicité. On suppose que d et n vérifient les conditions de l'énoncé. On note $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p$ les valeurs propres (distinctes) de d. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On note $\tilde{E}_j = \ker(d_i - \tilde{\lambda}_j \operatorname{Id}_E)$. Comme d et n commutent, $\tilde{E}_j$ est stable par d et n, et donc par u. On note d_j, n_j et u_j les restrictions correspondantes. On a $d_j = \tilde{\lambda}_j \operatorname{Id}_{\tilde{E}_j}$ et $n_j = (u_j - \tilde{\lambda}_j \operatorname{Id}_{\tilde{E}_j})$. On note $m_j \in \mathbb{N}^*$ la dimension de $\tilde{E}_j$. Alors le polynôme caractéristique de n_j est $(-X)^{m_j}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\chi_u(X) &= \prod_{j=1}^{p} \chi_{u_j}(X) = \prod_{j=1}^{p} \det(u_j - X \operatorname{Id}_{\tilde{E}_j}) = \prod_{j=1}^{p} \det(n_j - (X - \tilde{\lambda}_j) \operatorname{Id}_{\tilde{E}_j}) \\ &= \prod_{j=1}^{p} (-1)^{m_j} (X - \tilde{\lambda}_j)^{m_j}.\end{aligned}$$

Cela prouve que u et d ont mêmes valeurs propres. En particulier $k = p$ et quitte à les réordonner, on peut supposer que $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. En outre on a $m_j = \alpha_j$. Soient $x \in \tilde{E}_j$. On a $(u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_j}(x) = n_j^{m_j}(x) = 0$. Donc $\tilde{E}_j \subset F_j$. Inversement soit $x \in F_j$. On a $x = \sum_{i=1}^k x_i$ avec $x_i \in \tilde{E}_i \subset F_i$ pour tout i. Nécessairement $x_i = 0$ pour tout $i \neq j$, donc $x = x_j \in \tilde{E}_j$. Finalement $\tilde{E}_j = F_j$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. Ainsi les $\tilde{\lambda}_j$ et les $\tilde{E}_j$ sont uniquement déterminés par u, donc d est uniquement déterminé par u. Par suite, $n = u - d$ est également uniquement déterminé par u.

- Inversement, montrons que d et n ainsi obtenus vérifient bien les conditions de l'énoncé. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, F_j est stable par u. On a $u|_{F_j} = d_j + n_j$ avec $d_j = \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$ et $n_j = (u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)|_{F_j}$. n_j est bien est un endomorphisme nilpotent sur $F_j = \ker((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)_j^{\alpha})$. En outre il est clair que d_j et n_j commutent. Il suffit donc de considérer d et n qui coïncident avec d_j et n_j sur F_j pour chaque $j \in [\![1, k]\!]$. d est bien diagonalisable (considérer une base de E adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$) et n est nilpotant (si $\alpha = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \alpha_j$ on a $n^{\alpha} = 0$). Cela prouve l'existence.
- Enfin, d'après le lemme des noyaux, la projection π_j de E sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{i \neq j} F_i$ est un polynôme en u pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. Or $d = \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \pi_j$, donc d puis $n = u - d$ sont des polynômes en u. □

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on note

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K}).$$

Proposition (Réduction des endomorphismes nilpotents). *Soit u un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme*

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_\nu}(0) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

où $m_1, \ldots, m_\nu \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m_1 + \cdots + m_\nu = n = \dim(E)$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$ le résultat est clair, puisque le seul endomorphisme nilpotent est 0. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$ (pour $n \geqslant 2$). Si $u = 0$, le résultat est clair. Sinon on note $k \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de nilpotence de u (*ie.* $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$). Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) = 0$. On note

$$F = \operatorname{vect}\left(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \ldots, u(x), x\right)$$

Montrons que F est de dimension k. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \cdots + \alpha_{k-1} u^{k-1}(x) = 0.$$

En appliquant u^{k-1} à cette égalité on obtient que $\alpha_0 u^{k-1}(x) = 0$, et donc $\alpha_0 = 0$. Puis, en appliquant successivement $u^{k-2}, \ldots, u^2, u, \operatorname{Id}_E$ on obtient que $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = 0$, etc. jusqu'à $\alpha_{k-1} = 0$. Cela prouve que la famille $\beta_x = \big(u^{k-1}(x), \ldots, u(x), x\big)$ est libre, et donc que $\dim(F) = k$. En outre il est facile de voir que F est stable par u et que la matrice de $u|_F$ dans la base β_x est $J_k(0)$. Si $k = n$, cela conclut la démonstration (avec $\nu = 1$ et $m_\nu = n$). On suppose maintenant que $k < n$.

- On considère maintenant $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi\big(u^{k-1}(x)\big) \neq 0$ et on note

$$\Gamma = \operatorname{vect}\left(\varphi, u^T(\varphi), (u^2)^T(\varphi), \ldots, (u^{k-1})^T(\varphi)\right) \subset E^*.$$

Montrons que Γ est de dimension k. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_0 \varphi + \alpha_1 u^T(\varphi) + \dots + \alpha_{k-1}(u^{k-1})^T(\varphi) = 0.$$

On évalue cette égalité entre formes linéaires au point $y = u^{k-1}(x)$. On obtient $\alpha_0 \varphi(u^{k-1}(x)) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis, en appliquant successivement cette égalité en $u^{k-2}(x), \dots, u(x), x$ on obtient que $\alpha_1 = 0$ puis $\alpha_2 = 0$, etc. jusqu'à $\alpha_{k-1} = 0$. On a bien $\dim(\Gamma) = k$. On note maintenant $G = \Gamma^{\perp}$. G est un sous-espace de E de dimension $n - k$. En outre, comme Γ est stable par u^T, G est stable par u.

- Soit $y \in F \cap G$. Il existe $y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que $y = \sum_{j=0}^{k-1} y_j u^j(x)$. Puisque $y \in G$ on a

$$0 = \big((u^{k-1})^T(\varphi)\big)(y) = y_0 \varphi(u^{k-1}(x)).$$

Cela implique que $y_0 = 0$. En appliquant successivement $(u^{k-2})^T, \dots, u^T(\varphi), \varphi$ on obtient que $y_1 = 0, \dots, y_{k-1} = 0$. Cela prouve que $y = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. Comme $\dim F + \dim G = n$, on obtient que F et G sont supplémentaires dans E.

- La restriction de u à G est un endomorphisme nilpotent de G. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\beta_G = (e_{k-1}, \dots, e_n)$ telle que la matrice de $u|_G$ dans la base β_G est diagonale par blocs avec des blocs de la forme $J(0)$. En concaténant la base β_x de F et la base β_G de G, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u a bien la forme voulue. □

Théorème (Réduction de Jordan)**.** *On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme*

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\mu_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_\nu}(\mu_\nu) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}),$$

où $\nu \in \mathbb{N}^*$, $m_1 + \dots + m_\nu = n = \dim(E)$ et $\mu_1, \dots, \mu_\nu \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de u.

Démonstration. On note $n = \dim(E)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres (distinctes) de u. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

D'après le lemme des noyaux on a

$$E = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker\big((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\big).$$

Pour $j \in [\![1, k]\!]$ on note $F_j = \ker\big((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\big)$. Alors F_j est stable par u et $u|_{F_j} = \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j} + N_j$ où $N_j = (u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)|_{F_j}$ est un endomorphisme nilpotent. D'après la proposition précédente, il existe une base β_j de F_j dans laquelle la matrice de N_j est diagonale par blocs avec des blocs de la forme $J(0)$, donc la matrice de $u|_{F_j}$ est formée de blocs $J(\lambda_j)$. En concaténent les bases ainsi obtenues pour chaque sous-espace caractéristique, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u a bien la forme voulue. □