# TD n° 4 :
# Équations elliptiques

**Exercice 4.1** (Fonction de Green et Principe du maximum)**.** Soient $f$ et $k$ deux fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose que $k$ ne prend que des valeurs strictement positives. On considère le problème de Poisson-Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \forall x \in ]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que $f$ et $k$ sont continues sur $[0,1]$ et que $\inf_{[0,1]} k > 0$.
**1.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x)$.
**2.** Montrer que le problème (1) admet une unique solution (en un sens à préciser). Cette solution est-elle continue ? de classe $C^1$ ? de classe $C^2$ ?
**3.** Déterminer explicitement une fonction $G : [0,1]^2 \mapsto G(x,y)$ telle que l'unique solution de (1) s'écrit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{2}$$

**4.** Vérifier que $G$ est symétrique et positive (la fonction $G$ s'appelle *la fonction de Green* associée au problème (1)). En déduire le *principe du maximum faible* : si $g \geqslant 0$ alors $u \geqslant 0$ sur $I$.
**5.** Montrez que le problème (1) satisfait le *principe du maximum fort* : si $f \geqslant 0$ est non triviale alors $u > 0$ dans l'intervalle *ouvert* $]0,1[$.

**Exercice 4.2.** Soit $\Omega$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$. On définit sur $\Omega$ les fonctions $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $p(x) = 1 + |x|^2$, et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + pu = f_\alpha & (\Omega) \\ u = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\alpha$}$$

**1.** Pour quelles valeurs de $\alpha$ a-t-on $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ ? On considérera désormais que $\alpha$ satisfait cette condition.
**2.** Écrire la formulation variationnelle du problème ($\mathcal{P}_\alpha$), en précisant bien l'espace fonctionnel. Montrez que cette formulation variationnelle admet une unique solution $u_\alpha$.
**3.** Montrez que cette solution $u_\alpha$ est solution de l'EDP au sens des distributions sur $\Omega$, et qu'elle est en fait dans $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

**Exercice 4.3** (Problème de Neumann coercif)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & (\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{$\mathcal{N}$}$$

**1.** Écrire la formulation variationnelle correspondante. Montrez qu'il existe une unique solution $u$ de cette formulation variationnelle.
**2.** Montrez que $u$ est solution de l'EDP au sens des distributions.
**3.** Calculez $\int_\Omega u\, dx$ en fonction des données du problème
**4.** On admet que $u \in H^2(\Omega)$ et que, par suite, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. En quel sens $u$ est-elle solution du problème ($\mathcal{N}$) ?

**Exercice 4.4** (Problème de Neumann pseudo-coercif)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{$\mathcal{N}_0$}$$

**1.** Montrez que ce problème est mal posé sur $H^2(\Omega)$, c'est-à-dire (i) il n'y a pas unicité des solutions, et (ii) il existe des fonctions $f$ pour lesquelles il n'existe aucune solution.
**2.** Pour $u, v \in H^1(\Omega)$ on pose

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_\Omega u \, dx \right) \left( \int_\Omega v \, dx \right),$$

où $|\Omega| = \int_\Omega 1$. Montrez que $a$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1$.
**3.** En déduire qu'il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = \int_\Omega fv \, dx$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$.
**4.** On suppose que $\int_\Omega f \, dx = 0$. Montrez que $\int_\Omega u \, dx = 0$ et retrouvez l'EDP satisfaite par $u$.
**5.** On admet que $u \in H^2(\Omega)$, donc que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ; en quel sens $u$ satisfait-elle le problème ($\mathcal{N}_0$) ?

**Exercice 4.5** (Problème de Sturm par l'énergie)**.** On travaille dans l'intervalle $I = ]0,1[$. Soient $q$ et $f$ deux fonctions continues sur $\overline{I}$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x), & \forall x \in ]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

**1.** Vérifier que si $q(x) = -\pi^2$ alors le problème est mal posé, c'est-à-dire :

1. Il existe des fonctions $f$ pour lesquelles (3) n'a aucune solution.
2. Pour $f = 0$, il existe des solutions $u$ **non nulles** de (3).

Autrement dit, le problème (3) n'admet pas toujours des solutions, et s'il en existe elles sont nécessairement non uniques.
**2.** À partir de maintenant on suppose que la fonction $q$ vérifie

$$\inf_I q > -\pi^2.$$

Proposer une formulation variationnelle dans $H_0^1(I)$ du problème (3). Donner l'expression d'une fonctionnelle "énergie" $u \mapsto E(u)$ dont la solution de (3), si elle existe, serait un minimiseur. Montrer que cette fonctionnelle $E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour la topologie de $H_0^1(I)$.
**3.** Montrer que $E$ est minorée sur $H_0^1(I)$ et en déduire l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_n$, i.e. une suite vérifiant $E(u_n) \to \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v)$.
*Indication : $1/\pi$ est la constante optimale pour l'inégalité de Poincaré sur $I = ]0,1[$.*
**4.** Démontrer que cette suite minimisante est de Cauchy dans $H_0^1(I)$ et en déduire qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v) > -\infty$.
*Indication : on pourra écrire l'énergie $E$ comme une partie quadratique $Q$ plus une partie linéaire $L$ et exprimer $Q(u-v)+Q(u+v)$ en fonction de $Q(u)$ et $Q(v)$, puis estimer $Q(u-v)$ en fonction de $E(u)$ et $E(v)$.*
**5.** Montrer que la fonction $u$ ainsi obtenue est solution de la formulation variationnelle, et aussi solution de l'EDP au sens des distributions. Démontrer que $u$ est en fait dans $\mathcal{C}^2(I) \cap \mathcal{C}^1(\overline{I})$ et que $u$ est une solution du problème (3) au sens classique.
**6.** Quelle(s) étape(s) de la démonstration tombe(nt) en défaut quand $q(x) = -\pi^2$ (car d'après la question 1 le problème est mal posé) ?

**Exercice 4.6** (Généralités sur les méthodes de Galerkin)**.** Pour $I = ]0,1[$ on considère $k \in L^\infty(I)$ et $f \in L^2(I)$, et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\inf_I k \geqslant \alpha$. On munit $H_0^1(I)$ de la norme $\|u\|_{H_0^1(I)} = \|\nabla u\|_{L^2(I)}$ (qui est équivalente à la norme $H^1$ d'après l'inégalité de Poincaré), et on considère le problème

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \forall x \in ]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

**1.** Écrire la formulation variationnelle correspondante.
**2.** On introduit la forme bilinéaire $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$a(u, v) = \int_I k(x)\nabla u(x)\nabla v(x)\, dx.$$

a. Montrer que $a$ est continue et que $\|a\| \leqslant \|k\|_\infty$.
b. Montrer que $a$ est **coercive**, c'est-à-dire

$$a(u, u) \geqslant \alpha\|u\|^2_{H_0^1(I)}, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

c. En déduire qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(I)$ de la formulation variationnelle.

**3.** Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de $H_0^1(I)$, telle que $\dim V_n = n$. Démontrer qu'il existe une unique solution $u_n \in V_n$ de

$$\forall v_n \in V_n, \qquad \int_I k(x)\nabla u_n(x)\nabla v_n(x)\, dx = \int_I f(x) v_n(x)\, dx \qquad (FV_n)$$

**4.** Démontrer que la solution $u$ de la formulation variationnelle de départ et la solution $u_n$ de $(FV_n)$ vérifient

$$d(u, V_n) \leqslant \|u - u_n\|_{H_0^1} \leqslant \frac{\|k\|_\infty}{\alpha} d(u, V_n),$$

où $d(u, V_n) = \inf_{v\in V_n} \|u - v\|_{H_0^1}$.

**Exercice 4.7.** On rappelle que $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.
**1.** A-t-on l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$ ?
*Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $u_n(x) = e^{-x^2/n}$.*
A partir de maintenant on munit $H_0^1$ de la norme usuelle, c'est-à-dire $||u||^2_{H_0^1} = ||u||^2_{L^2} + ||u'||^2_{L^2}$.
**2.** Montrer que si $\alpha = cste > 0$ l'application

$$\mathcal{A} : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})\,, \quad u \mapsto -u'' + \alpha u$$

est bien définie et continue pour les topologies concernées.
**3.** En précisant toutes les hypothèses du ou des théorème(s) employé(s), montrer que pour tout $f \in L^2$ il existe une unique solution $u \in H_0^1(\mathbb{R})$ de l'EDP $\mathcal{A}u = f$ *au sens des distributions.*
**4.** Montrer que la solution $u$ de (iii) est en fait dans $H^2(\mathbb{R})$. A quel théorème de cours, que vous énoncerez, ceci vous fait-il penser ?
**5.** Montrer que, si $\mathcal{A}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R})$ est défini par $\mathcal{A}^{-1}(f) = u$, alors $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = Id_{L^2}$ .
**6.** En utilisant la formulation variationnelle , estimer la norme $H^1$ de $u = \mathcal{A}^{-1}(f)$ en fonction de $||f||_{L^2}$ et $\alpha > 0$. En déduire que $\mathcal{A}^{-1}$ est continu de $L^2$ dans $H^2$ (pour les topologies concernées) et estimer sa norme d'opérateur en fonction de $\alpha > 0$.
**7.** Question bonus : quelles étapes dans la construction ci-dessus de l'inverse $\mathcal{A}^{-1}$ tombent en défaut si on remplace $I = \mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^N$ avec $N \geqslant 2$ ?

**Exercice 4.8.** Soient $\Omega$ un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On souhaite résoudre le problème elliptique suivant, avec conditions aux limites de type Robin (ou Fourier) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f\,, & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u = g\,, & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

**1.** Donner la formulation faible (ou variationnelle) de ce problème.
**2.** Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible. Pour cela on pourra prouver et utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs : il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2\, d\sigma\right)^{1/2} \geq \beta||u||_{L^2(\Omega)}\,.$$

**3.** Que peut-on dire sur la régularité de la solution ?