Université de Toulouse III, FSI - Département de Mathématiques
MASTER 1 MAF module EDO et EDP , 2013-2014

Partiel du 13 mars 2014

Durée : 3 h. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 Stabilité par fonction de Lyapunov

On considère l'équation différentielle ordinaire $(*) \begin{cases} X' = f(X), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ avec $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ localement Lispchitzienne, et un equilibre $\bar{X}$ de $(*)$.

Question 1 : vérifiez que pour toute condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^d$, $(*)$ admet une unique solution $X(t)$ définie sur un intervalle $]T_*, T^*[$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathcal{B}_\varepsilon := \left\{X \in \mathbb{R}^d,\ \|X - \bar{X}\|_{\mathbb{R}^d} < \varepsilon\right\}$.

On suppose qu'il existe $\rho > 0$ et une fonction continue $L := X \in \overline{\mathcal{B}_\rho} \mapsto L(X) \in \mathbb{R}$ telle que
(a) $L(\bar{X}) = 0$ et $L(X) > 0$ pour tout $X \in \overline{\mathcal{B}_\rho}$
(b) pour tout $X(t)$ solution de $(*)$ avec $X_0 \in \overline{\mathcal{B}_\rho}$, $L(X(t))$ est une fonction décroissante.

L'objectif des questions suivantes est de démontrer que sous ces conditions, $\bar{X}$ est un équilibre stable.

Question 2 : pour $\eta > 0$, on note $U_\eta := \left\{X \in \overline{\mathcal{B}_\rho},\ L(X) < \eta\right\}$. Montrez que pour tout ε, $0 < \varepsilon < \rho$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $U_{\eta_\varepsilon} \subset \mathcal{B}_\varepsilon$.

Question 3 : on prend ε et η_ε comme à la question précédente. Montrez que si $X(t)$ est solution de $(*)$ avec $X_0 \in U_{\eta_\varepsilon}$, alors $X(t) \in U_{\eta_\varepsilon}$ pour tout $t \in [t_0, T^*[$. En déduire que $T^* = +\infty$.

Question 4 : déduire des questions 2 et 3 que $\bar{X}$ est un équilibre stable.

Exercice 2 Étude d'une équation différentielle bi-dimensionnelle

On s'intéresse à l'équation différentielle 2d

$$(1) \begin{cases} X' = V(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

avec $X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ défini par $V(X) := \begin{pmatrix} -y\sqrt{x^2+y^2} - x(x^2+y^2) \\ x\sqrt{x^2+y^2} - y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$.

Question 1 : vérifiez que (1) admet une unique solution $X(t)$ définie sur $]T_*, T^*[$.

Question 2 : montrez que (1) admet pour unique équilibre $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrez que $L(X) := \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$ vérifie les hypothèses (a) et (b) de l'exercice précédent. En déduire que $\bar{X}$ est un équilibre stable.

On va montrer que $\bar{X}$ est un équilibre asymptotiquement stable. Pour cela, on va faire un changement de variable polaire : on pose

$$X(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t),\ r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)},\ \mathbf{e}_r(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

où $\theta(t)$ est l'angle entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On pose également

$$X_0 := r_0 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix},\ r_0 > 0,\ \theta_0 \in [0, 2\pi[.$$

Question 3 : montrez que (1) est équivalent au système

$$(2) \begin{cases} r' = -r^3, & r(0) = r_0 \\ \theta' = r, & \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Résoudre (2). En déduire que $T^* = +\infty$ et que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = \bar{X}$. Que vaut T_* ?

Exercice 3 Étude d'une équation de transport

On s'intéresse à l'équation de transport 1d

$$(\mathcal{ET})\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c(t,x)\,\partial_x u(t,x) = 0 \text{ pour } x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ \\ u(0,x_0) = u_0(x_0) \text{ pour } x_0\in\mathbb{R} \end{cases}$$

avec $c(t,x) = \sin(t)\sin(x)$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Les caractéristiques associées vérifient donc l'équation différentielle ordinaire

$$(\mathcal{EDO})\begin{cases} \partial_t X(t;t_0,x_0) = c(t, X(t;t_0,x_0)) \\ \\ X(t_0;t_0,x_0) = x_0. \end{cases}$$

Question 1 : vérifiez que $(\mathcal{EDO})$ admet une unique solution définie sur $]T_*;T^*[$.

Question 2 : montrez que $X(t;t_0,k\pi) = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. En déduire que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, la solution de $(\mathcal{EDO})$ est globale.

Question 3 : montrez que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, on a

$$X(t;t_0,x_0+2\pi) = X(t;t_0,x_0)+2\pi$$
$$X(t;t_0,-x_0) = -X(t;t_0,x_0)$$

En déduire qu'on peut se restreindre à l'étude de $(\mathcal{EDO})$ sur $]0,\pi[$.

Question 4 : calculez $X(t;t_0,x_0)$ pour $x_0\in]0,\pi[$. Indication : on pourra calculer

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\tan\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)\right).$$

Question 5 : en déduire la solution de $(\mathcal{ET})$.

Question 6 : on suppose que $\mathsf{supp}(u_0) = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Trouvez le support de $u(t,x)$ en fonction de t.

Exercice 4 Équation des ondes

Soient $c>0$, u_0 une fonction de classe C^2 et u_1 une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'équation des ondes

$$(3)\begin{cases} \forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \\ \forall x\in\mathbb{R}, & u(0,x) = u_0(x), \\ \forall x\in\mathbb{R}, & \partial_t u(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

Question 1 : on suppose que $u\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ est solution de (1) et on note $v = \partial_t u - c\partial_x u$.

- Montrez que le couple (u,v) est solution sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t u - c\partial_x u = v, \\ \partial_t v + c\partial_x v = 0. \end{cases}$$

- En déduire une expression explicite de u en fonction des données du problème.

Question 2 : montrez que l'équation des ondes (3) admet une unique solution C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Question 3 : on suppose qu'il existe $R>0$ tel que u_0 et u_1 sont à support dans $[-R,R]$. Montrez que pour tout $t>0$ l'application $x\mapsto u(t,x)$ est à support compact (contenu dans un intervalle que l'on explicitera en fonction de R et t).