TD n° 2 :

Intégrales généralisées

Exercice 2.1. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, étudier la convergence de l'intégrale et, lorsqu'elle est convergente, donner sa valeur :

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt; \quad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt; \quad 3)\ \int_0^{+\infty} \cos(t)\,dt;$$

$$4)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt, \quad 5)\ \int_{-1}^{0} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}\,dt; \quad 6)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-3x-7)\,dx;$$

Exercice 2.2. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, étudier la convergence de l'intégrale et, lorsqu'elle est convergente, donner sa valeur :

$$1)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx; \quad 2)\ \int_0^{1} \ln(x)\,dx; \quad 3)\ \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt;$$

$$4)\ \int_4^{5} \frac{1}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}\,dt; \quad 5)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,dt; \quad 6)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt.$$

Exercice 2.3. Étudier pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^\alpha\,dt$.

Exercice 2.4. 1. Soit f une fonction impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la limite quand x tend vers $+\infty$ de la quantité $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.
2. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$.
3. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Montrer que $\int_{-x}^{2x} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.
4. Étudier la limite éventuelle de la fonction $x \mapsto \int_{-x}^{2x} \sin(t)\,dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2.5. On considère la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est définie sur $[n, n+1[$ par les propriétés suivantes :

- $f(n) = f\big(n + \frac{1}{2n^3}\big) = 0$, $f\big(n + \frac{1}{4n^3}\big) = n$,
- f est linéaire sur $\big[n, n + \frac{1}{4n^3}\big]$ et sur $\big[n + \frac{1}{4n^3}, n + \frac{1}{2n^3}\big]$,
- f est nulle sur $\big[n + \frac{1}{2n^3}, n+1\big[$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Montrer que f n'est pas bornée.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2}.$$

4. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Exercice 2.6. 1. Montrer qu'on a :

$$\sqrt{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \sqrt{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x/2}$$

2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$ est convergente.

Exercice 2.7. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\ \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\,; \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx\,; \qquad 3)\ \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt\,;$$

$$4)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt\,; \qquad 5)\ \int_0^1 \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,; \qquad 6)\ \int_0^1 \frac{1}{e^t-\cos t}\,dt\,;$$

$$7)\ \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,dt\,; \qquad 8)\ \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}\,dt\,; \qquad 9)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,dt.$$

Exercice 2.8. Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\,dt\,; \quad 2)\ \int_0^{\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt\,; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx.$$

Exercice 2.9. **1.** Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ on a : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$.
4. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ est divergente.

Exercice 2.10. Pour tout $\alpha > 0$, étudier la convergence et la convergence absolue de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$.

Exercice 2.11. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$.

Exercice 2.12. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2+\cos(t)}-t\right)\,dt$.

Exercice 2.13. On note : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$
1. Déterminer le domaine de définition D_Γ de Γ.
2. Montrer que pour tout $x \in D_\Gamma$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$ converge, et calculer sa valeur.

Exercice 2.15. Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\,dt$ sont convergentes et ont même valeur.

Exercice 2.16. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ converge et vaut 0.

Exercice 2.17. **1.** Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,1[$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente.
2. On prolonge f par 0 au point 1. Montrer que la fonction ainsi obtenue est en fait intégrable sur le segment $[0,1]$ au sens usuel. [1]

Exercice 2.18. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors f tend vers 0 en $+\infty$ (on pourra par exemple utiliser le critère de Cauchy).
2. Montrer que ce n'est plus valable si on suppose f seulement continue.

1. On n'a pas besoin de supposer que f admet une limite en 1^- ; malgré cela on est dans une situation que l'on peut qualifier d'intégrale faussement généralisée.