

TD n° 1 :

Intégration sur un segment

Exercice 1.1. Déterminer les primitives (sur le plus grand domaine de définition possible) des fonctions définies de la façon suivante :

1.

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad ; \quad f_2(x) = (1-x)\sqrt{x} \quad ; \quad f_3(x) = (3x+2)^3$$

$$f_4(x) = \cos(4x+1) \quad ; \quad f_5(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

2.

$$f_6(x) = (5\sin x + 2)^3 \cos x \quad ; \quad f_7(x) = \frac{1}{3x+5} \quad ; \quad f_8(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$f_9(x) = (e^{2x} + 2)^4 e^{2x} \quad ; \quad f_{10}(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

3.

$$f_{11}(x) = \sin^2(x) \quad ; \quad f_{12}(x) = \cos^4(2x) \quad ; \quad f_{13}(x) = \cos(ax) \cos(bx) \text{ avec } a^2 \neq b^2$$

4.

$$f_{14}(x) = \frac{1}{x^2+4} \quad ; \quad f_{15}(x) = \frac{x}{x^2+4} \quad ; \quad f_{16}(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \quad ; \quad f_{17}(x) = \frac{1}{x^2+6x+5}$$

Exercice 1.2. En effectuant des intégrations par parties,

1. calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (2x+1)e^x dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^e x \ln(x) dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^e \ln(x) dx$$

$$I_4 = \int_1^e x(\ln(x))^2 dx \quad ; \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx \quad ; \quad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx$$

2. déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_2(x) = \arctan(x) \quad ; \quad f_3(x) = x^{24} \ln(x) \quad ; \quad f_4(x) = x\sqrt{1+x} \quad ; \quad f_5(x) = \ln(x^2+2).$$

Exercice 1.3. 1. En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx,$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad I_4 = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

2. Déterminer les primitives de la fonction $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$.

Exercice 1.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $x \in [a, b]$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

1. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$ (pourquoi un tel M existe-t-il?). Montrer que pour tous $x, y \in [a, b]$ on a :

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|.$$

2. En déduire que la fonction F est continue sur $[a, b]$.

Exercice 1.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.

1. Montrer que s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

2. Montrer que si $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

3. Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus valable si on retire l'hypothèse de continuité ou l'hypothèse de positivité pour f .

Exercice 1.6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 1.7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que :

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 1.8. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^2}; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}.$$

Exercice 1.9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{2n}$$

Exercice 1.10. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

Exercice 1.11. Pour $n \geq 2$ on note A_1, \dots, A_n les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k.$$