Quelques corrigés et résultats

Exercice 1.1.

1. Les primitives de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{4} + x^3 - x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$.
3. $x \mapsto \frac{1}{12}(3x+2)^4 + c$.
4. $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(4x+1) + c$.
5. $x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$.
6. $x \mapsto \frac{1}{20}(5\sin(x)+2)^4 + c$.
7. $x \mapsto \frac{\ln(|3x+5|)}{3} + c$.
8. $x \mapsto x - \ln(1+e^x) + c$.
9. $x \mapsto \frac{1}{10}(e^{2x}+2)^5 + c$.
10. $x \mapsto x - \ln(|x+2|) + c$.

Exercice 1.5. **1.** On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [a,b]$ avec $|x_0 - y| \leqslant \delta$ on a

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

Pour tout $y \in [a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a alors

$$f(y) \geqslant f(x_0) - |f(y) - f(x_0)| \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

En particulier il existe $y \in]a,b[$ tel que $f(y) > 0$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer qu'on avait déjà $x_0 \in]a,b[$, puis qu'on a choisi $\delta > 0$ de sorte que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$. On note u la fonction sur $[a,b]$ qui vaut $f(x_0)/2$ sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et 0 sur $[a,b] \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. u est étagée sur $[a,b]$, et en particulier intégrable. En outre on a $u \leqslant f$ sur $[a,b]$, donc

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b u(t)\,dt = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0.$$

2. Par contraposée, si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.
3. La fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = 1$ si $x = 0$ et $f(x) = 0$ sinon est positive, prend une valeur strictement postive en un point, mais son intégrale sur $[-1,1]$ est nulle (il manque la continuité). D'autre part la fonction sin est continue et non identiquement nulle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mais son intégrale est nulle (il manque la positivité).

Exercice 1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties on obtient

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

Comme f est de classe C^1 sur le segment $[a,b]$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f| \leqslant M$ et $|f'| \leqslant M$ sur $[a,b]$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)\sin(nb)| + |f(a)\sin(na)| + \int_a^b |f'(t)\sin(nt)|\,dt\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(2M + M(b-a)\right)\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 1.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on note $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$ on a $|f(x) - f(a_k)| \leqslant K\,|x-a|$, et donc

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx - (a_{k+1}-a_k) f(a_k) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|\,dx \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} K\,|x - a_k|\,dx \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} K \frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \\
&\leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 1.10. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 1.11. $\frac{4}{\pi}$.

Exercice 2.3. Si $\alpha \geqslant -1$ alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\alpha\,dt$ est divergente (c'est une intégrale de Riemann), et si $\alpha \leqslant -1$, c'est l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha\,dt$ qui est divergente. Ainsi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha\,dt$ est divergente.

Exercice 2.4. **1.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f est impaire, en faisant le changement de variables affine $t = -s$ ($dt = -ds$) on obtient

$$\int_{-x}^0 f(t)\,dt = -\int_x^0 f(-s)\,ds = -\int_0^x f(s)\,ds.$$

Par la relation de Chasles on a alors

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = \int_{-x}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

2. L'application sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $A \geqslant 0$ on a

$$\int_0^A \sin(t)\,dt = 1 - \cos(A).$$

Or cette quantité n'admet pas de limite quand A tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt$ est divergente. En particulier, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ est divergente.

Exercice 2.5. **2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f\big(n + \frac{1}{4n^3}\big) = n$, donc f n'est pas bornée.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale $\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ est l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées $(k, 0)$, $\big(k + \frac{1}{2k^3}, 0\big)$ et $\big(k + \frac{1}{4k^3}, k\big)$, soit $\frac{1}{4k^2}$. On peut également faire le calcul. Pour tout $x \in \big[k, k + \frac{1}{2k^3}\big]$ on a $f(x) = 4k^4(x-k)$, donc

$$\int_k^{k+\frac{1}{4k^3}} f(x)\,dx = 4k^4 \int_k^{k+\frac{1}{4k^3}} (x-k)\,dx = 4k^4 \times \frac{1}{32k^6} = \frac{1}{8k^2}.$$

De même on vérifie que

$$\int_{k+\frac{1}{4k^3}}^{k+\frac{1}{2k^3}} f(x)\,dx = \frac{1}{8k^2},$$

et on a $\int_{k+\frac{1}{2k^3}}^{k+1} f(x)\,dx = 0$. Finalement, par la relation de Chasles on a bien

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \frac{1}{4k^2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient alors par la relation de Chasles que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2}.$$

4. On sait que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4k2}$ est convergente (c'est une série de Riemann [1]). La fonction f est positive sur $[1, +\infty[$, donc la fonction $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est croissante. Pour montrer qu'elle admet une limite, il suffit de montrer qu'elle est majorée. Soit $x \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \leqslant n$. Alors on a :

$$F(x) \leqslant F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}.$$

Cela prouve que F est majorée, et donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Exercice 2.7.

-
- La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in]0, 1]$ on a

$$\left| \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$$

  et

$$\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

  Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente (intégrale de Riemann), donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives on obtient que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ est absolument convergente donc convergente. D'autre part pour $x \geqslant 1$ on a

$$\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \geqslant 0$$

  et

$$\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right),$$

  donc par comparaison avec une intégrale de Riemann l'intégrale on obtient que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ est convergente. Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ est convergente.

Exercice 2.8.

- Condition : $\alpha \in]-1, 0[$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$. Par croissances comparées on a

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

  donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$ est faussement généralisée. D'autre part on a

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$$

1. On rappelle d'ailleurs qu'on montre que cette série est convergente en la comparant à une intégrale de Riemann.

Si $\alpha > 1$ et $\varepsilon = \alpha - 1 > 0$ on a par croissances comparées :

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{2\alpha-1-\varepsilon}}\right).$$

Comme $2\alpha - 1 - \varepsilon = \alpha > 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha-1-\varepsilon}}\, dt$ est convergente, donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives on obtient que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ est convergente. Si $\alpha \leqslant 1$ on a pour tout $t \geqslant e$

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} \geqslant \frac{t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha-1}}.$$

Or l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha-1}}\, dt$ diverge, donc par comparaison l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ diverge. Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3.3. **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} f(t)^n\, dt \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} f(1-\varepsilon)^n\, dt = (1-\varepsilon) f(1-\varepsilon)^n$$

Comme $f(1-\varepsilon) \in [0,1[$ on a donc

$$\int_0^{1-\varepsilon} f(t)^n\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$0 \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} f(t)^n\, dt \leqslant \varepsilon.$$

2. D'autre part on a

$$0 \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 f(t)^n\, dt \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 1\, dt \leqslant \varepsilon,$$

et donc pour tout $n \geqslant N$:

$$0 \leqslant \int_0^1 f(t)^n\, dt \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\int_0^1 f(t)^n\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|f_n|$ atteint son maximum en n, où elle vaut $1/n$, donc la suite de fonction converge uniformément (et donc simplement) vers 0. On a alors

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt 0.$$

Mais d'autre part on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = 1,$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Pour cette suite de fonctions il n'y a pas égalité entre la limite de l'intégrale et l'intégrale de la limite, alors qu'il y a convergence uniforme.