Université de Toulouse III, FSI - Département de Mathématiques
MASTER 1 MAF module EDO et EDP , 2012-2013

Examen du 22 mai 2013

Durée: 4h, documents et calculatrices interdits

Pour cette épreuve on pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

- Si Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ alors l'inclusion $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich).
- Si Ω est un ouvert borné connexe et régulier de $\mathbb{R}^d$, et si $\nabla u = 0$ au sens des distributions, alors il existe une constante α telle que $u = \alpha$ presque partout dans Ω.

Exercice 1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction non identiquement nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \varphi(x+n)$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite (fortement) convergente dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p \leq \infty$.
3. Montrer que u_n converge faiblement vers 0 dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, pour $1 < p < \infty$.

Exercice 2. **1.** En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre au sens classique le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = -u(t,x) + \sin(t), & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont donnés.
2. On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = -u(t,x) + \sin(t), & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}_+, \\ u(t,0) = g(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2}$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ sont donnés, avec $g(0) = u_0(0)$. Montrer que le problème (2) admet une unique solution u continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \,|\, x \neq ct\}$. Expliciter u en fonction des données du problème.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^d$. On étudie sur Ω un problème de Poisson avec conditions aux limites de type Robin (ou Fourier) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f\,, & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u = g\,, & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3}$$

où $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ sont donnés. Pour cela on va montrer puis utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs : il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \geq \beta ||u||^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{4}$$

1. On cherche à montrer (4) en faisant un raisonnement par l'absurde.

a. Montrer que si (4) n'est pas vérifiée, alors on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de $H^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \qquad \text{et} \qquad ||\nabla u_n||^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} |u_n|^2 \, d\sigma \leqslant \frac{1}{n}.$$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$. On note u^* la limite obtenue.

c. Montrer que $u^* = 0$ et obtenir une contradiction.

2. On cherche maintenant à résoudre le problème (3).

a. Écrire une formulation variationnelle, et montrer qu'elle admet une unique solution u dans un espace à préciser.

b. Montrer que l'équation $-\Delta u = f$ est alors vérifiée dans $L^2(\Omega)$.

c. Question Bonus : Montrer que u est une solution forte de (3). A défaut de le faire rigoureusement, proposer une méthode et expliquer les difficultés rencontrées pour la justifier.

Corrigé

Exercice 1. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction u_n est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et en particulier dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $u_n' = \varphi'(x+n)$. Si $p < \infty$ on a

$$\|u_n\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x+n)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p \, dx = \|\varphi\|_{L^p}^p ,$$

et de même $\|u_n'\|_{L^p} = \|\varphi'\|_{L^p}$. Si $p = \infty$ on a également $\|u_n\|_{L^p} = \|\varphi\|_{L^p}$ et $\|u_n'\|_{L^p} = \|\varphi'\|_{L^p}$. Dans tous les cas on a $\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$, et en particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

2. • Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in [1, +\infty]$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tels que la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^p(\mathbb{R})$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-N, N]$. Alors pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $|j-k| > 2N$ les fonctions u_{n_j} et u_{n_k} sont à supports disjoints donc si $p < \infty$ on a

$$\left\|u_{n_j} - u_{n_k}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \left\|u_{n_j}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \|u_{n_k}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 2\,\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}^p ,$$

et si $p = \infty$ alors $\left\|u_{n_j} - u_{n_k}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Dans tous les cas cela contredit le fait que la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R})$.

• [Autre démonstration] Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in [1, +\infty]$, $u \in L^p(\mathbb{R})$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Soit $R \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-\infty, R[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\operatorname{supp}(u_n) \subset]-\infty, R-n[$. Soit alors $K \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geqslant K$ on a

$$\|u\|_{L^p(]R-n_K,+\infty[)} = \|u - u_{n_k}\|_{L^p(]R-n_K,+\infty[)} \leqslant \|u - u_{n_k}\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $u = 0$ presque partout sur $]R - n_K, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $K \in \mathbb{N}$ on obtient que $u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ et donc que $u = 0$ dans $L^p(\mathbb{R})$. Mais alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\varphi\|_{L^p} = \|u_{n_k}\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_{n_k} - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ce qui est absurde.

3. Soit $\Phi \in W^{1,p}(\mathbb{R})^*$. Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors il existe $v_0, v_1 \in L^q(\mathbb{R})$ tels que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ on a

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}} (uv_0 + u'v_1)(x)\, dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|\geqslant R} |v_0(x)|^q \, dx \leqslant \frac{\varepsilon^q}{2\,\|\varphi\|_{W^{1,p}}} \quad \text{et} \quad \int_{|x|\geqslant R} |v_1(x)|^q \, dx \leqslant \frac{\varepsilon^q}{2\,\|\varphi\|_{W^{1,p}}}$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant \mathbb{N}$ on a $\operatorname{supp}(u_n) \cap [-R, R] = \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n v_0 + u_n' v_1)(x)\, dx = \int_{|x|\geqslant R} (u_n v_0 + u_n' v_1)(x)\, dx \leqslant \varepsilon\, \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\Phi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et donc que u_n converge faiblement vers 0 dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. 1. On suppose que $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution du problème (1). Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$ on note

$$v(t,y) = u(t, y + ct).$$

Pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a alors

$$\partial_t v(t,y) = \partial_t u(t,y+ct) + c\partial_x u(t,y+ct) = -u(t,y+ct) + \sin(t) = -v(t,y) + \sin(t).$$

Une solution particulière de l'équation $w' = -w + \sin(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))$, et donc les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))$. Ainsi il existe une fonction $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$v(t,y) = A(y)e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\sin(t) - \cos(t)\big).$$

Or pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $v(0,y) = u(0,y) = u_0(y)$, donc $A(y) = u_0(y) + \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$v(t,y) = \left(u_0(y) + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\sin(t) - \cos(t)\big).$$

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a alors

$$u(t,x) = v(t, x - ct) = \left(u_0(x - ct) + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\sin(t) - \cos(t)\big).$$

Cela prouve en particulier l'unicité d'une éventuelle solution. Inversement, la fonction u ainsi définie est bien de classe C^1 et pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\partial_t u(t,x) = \left(-cu_0'(x-ct) - u_0(x-ct) - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\cos(t) + \sin(t)\big)$$

et

$$\partial_x u(t,x) = u_0'(x-ct)e^{-t},$$

donc

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = -\left(u_0(x-ct) + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \sin(t) = -u(t,x) + \sin(t).$$

Ainsi u est l'unique solution classique au problème (1).

2. On suppose que $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est solution du problème (2). Pour $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ on note

$$v(t,y) = u(t, y + ct).$$

Comme précédemment on a alors

$$\partial_t v(t,y) = -v(t,y) + \sin(t),$$

donc

$$v(t,y) = \left(u_0(y) + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\sin(t) - \cos(t)\big)$$

puis, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $x \geqslant ct$:

$$u(t,x) = v(t, x-ct) = \left(u_0(x-ct) + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{1}{2}\big(\sin(t) - \cos(t)\big).$$

Pour $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ on note maintenant

$$w(t,y) = u\left(t + \frac{y}{c}, y\right).$$

On a alors

$$\partial_y w(t,y) = \frac{1}{c}\left(\partial_t u\left(t+\frac{y}{c}, y\right) + c\partial_x u\left(t+\frac{y}{c}, y\right)\right) = \frac{1}{c}\left(-w(t,y) + \sin\left(t+\frac{y}{c}\right)\right),$$

Ainsi il existe une fonction $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ on a

$$v(t,y) = B(t)e^{-\frac{y}{c}} + \frac{1}{2}\left(\sin\left(t+\frac{y}{c}\right) - \cos\left(t+\frac{y}{c}\right)\right).$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $v(t,0) = u(t,0) = g(t)$, donc $B(t) = g(t) - \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))$. Ainsi pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$v(t,y) = \left(g(t) - \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)\right) e^{-\frac{y}{c}} + \frac{1}{2}\left(\sin\left(t+\frac{y}{c}\right) - \cos\left(t+\frac{y}{c}\right)\right),$$

et donc, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant ct$:

$$u(t,x) = w\left(t - \frac{x}{c}, x\right) = \left(g\left(t-\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{2}(\sin\left(t-\frac{x}{c}\right) - \cos\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) e^{-\frac{x}{c}} + \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t)\right).$$

Les deux expressions obtenues sont de classe C^1 et solutions de l'équation sur $\{x > ct\}$ et $\{x < ct\}$ respectivement. En outre elles sont continues sur $\{x \geqslant ct\}$ et $\{x \leqslant ct\}$ respectivement et coïncident sur $\{x = ct\}$, donc la fonction u ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Exercice 3. 1. a. Si (4) n'est pas vérifiée alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction $\tilde{u}_n \in H^1(\Omega)$ telle que

$$||\nabla \tilde{u}_n||^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} |\tilde{u}_n|^2 \, d\sigma < \frac{1}{n}||\tilde{u}_n||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a en particulier $\|\tilde{u}_n\| > 0$. Il suffit alors de considérer $u_n = \tilde{u}_n / \|\tilde{u}_n\|$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\|u_n\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla u_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. On en déduit qu'elle admet une sous-suite faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$ puis, par le théorème de Rellich, une sous-suite fortement convergente dans $L^2(\Omega)$. On continue de noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sous-suite en question.

c. Puisque $u_n \to u^*$ dans $L^2(\Omega)$ et $\|\nabla u_n\|_{L^2} \to 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, et donc convergente dans $H^1(\Omega)$. Nécessairement la limite est u^*. Par passage à la limite on obtient que $\nabla u^* = 0$ et donc que u^* est presque partout égale à une constante γ. Sa trace sur le bord $\partial\Omega$ est donc égale à la fonction constante égale à γ sur $\partial\Omega$. Mais alors

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma| \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} |u^*| \, d\sigma \leqslant \int_{\partial\Omega} |u_n| \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} |u^* - u_n| \, d\sigma \leqslant \frac{1}{n} + C\|u_n - u^*\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Cela prouve que $\gamma = 0$, que u^* est donc nulle presque partout sur Ω. Cela contredit le fait que $\|u^*\|_{L^2(\Omega)} = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

2. a. On suppose que $u \in H^2(\Omega)$ est solution du problème (3). Alors pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on a par la formule de Green :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\Delta u(x) v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(v)\,dx \\
&\quad \Longleftrightarrow \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x) v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(v)\,dx \\
&\quad \Longleftrightarrow \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dx + \int_\Omega f(x)v(v)\,dx.
\end{aligned}$$

Ainsi u est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned}
&u \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\
&\qquad \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dx + \int_\Omega f(x)v(v)\,dx. \quad (\mathcal{V})
\end{aligned}$$

Pour $u, v \in H^1(\Omega)$ on note

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,dx + \int_\Omega f(x)v(v)\,dx.$$

Alors a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)$, tandis que L est une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis les théorèmes de traces il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$|L(v)| \leqslant \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \Big(C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$|a(u,v)| \leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant (1+\alpha C^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Cela prouve que a et L sont continues. D'autre part, d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta^2 \min\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \underbrace{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \alpha\beta^2\right)}_{>0} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Cela prouve que a est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgramm le problème $(\mathcal{V})$ admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

b. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. En appliquant $(\mathcal{V})$ avec $v = \varphi$ on obtient

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Cela prouve que u est solution de l'équation $-\Delta u = f$ au sens des distributions. Puisque $f \in L^2(\Omega)$, on obtient que $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, et donc l'équation $-\Delta u = f$ est valable dans $L^2(\Omega)$.

c. D'après la formule de Green on a pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle \partial_n u, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} .$$

On ne peut pas appliquer la formule du cours du fait qu'on ne sait pas encore que u est dans $H^2(\Omega)$, mais cette formule est en fait valable sous la seule hypothèse que $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, voir par exemple [Gri85, (1.5.3.10)], à condition de bien voir le membre de droite comme un crochet de dualité, et pas comme un produit scalaire $L^2(\partial\Omega)$ (ce que vous ne pouviez pas savoir, c'est pourquoi on ne demandait pas de réponse précise et la question était hors barême). En comparant avec $(\mathcal{V})$ on obtient que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \langle \partial_n u, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} + \alpha \langle u, v \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle g, v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

Par densité de l'application trace de $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ on obtient que

$$\partial_n u + \alpha u = g$$

dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Puisque les deux derniers termes sont dans $L^2(\partial\Omega)$, c'est aussi le cas de $\partial_n u$, et donc cette égalité est vraie dans $L^2(\partial\Omega)$. A ce stade on a $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\partial_n u \in L^2(\partial\Omega)$, la première équation de (3) est vérifiée dans $L^2(\Omega)$ et la seconde dans $L^2(\partial\Omega)$.

Pour autant u n'appartient pas forcément à $H^2(\Omega)$. En effet si c'était le cas on aurait $u|_{\partial\Omega}, \partial_n u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et donc $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, ce qui n'est pas forcément vrai. Par contre si on ajoute l'hypothèse que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors on a $\partial_n u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, et donc par régularité elliptique on obtient que u est dans H^2. De façon analogue on peut vérifier que plus f et g sont régulières, plus u est régulière.

Références

[Gri85] P. Grivard. *Elliptic problems in nonsooth domains.* Pitman Advanced Publishing programs, 1985.