TD n° 4 :
Inversion locale - Fonctions implicites

Exercice 4.1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Montrer que f définit une application surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
 a. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0).
 b. Montrer que f définit un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0).
4. L'application f réalise-t-elle un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Exercice 4.2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe C^1, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 4.3. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{array} \right.$$

Montrer que l'image de f est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.4. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$ le problème

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 & = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) & = b \end{cases}$$

admet une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x + a\cos(y), y + b\sin(x)) \end{array} \right.$$

1. A quelle condition sur (a,b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$. On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$.
3. En déduire que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 4.6. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice ?

Exercice 4.7. On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0 \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in D_\varphi \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction ψ sur un domaine $D_\psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in D_\psi \text{ et } x = \psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions φ et ψ ?

Exercice 4.8. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x))$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4.9. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = x^2+y^2-1$. Montrer que pour x suffisament proche de 0 il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0 :

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Exercice 4.10. Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\right\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 4.11. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3-2xy+2y^2-1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point (1,1) et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 4.12. On considère le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x^4 & + & y^3 & + & z^4 & + & t^2 & = & 0, \\ x^3 & + & y^2 & + & z^2 & + & t & = & 2, \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,-1,1,0) et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe C^1 au voisinage de 0 tels que tout $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \varphi(t)$.
2. Calculer la dérivée de φ en 0.

Exercice 4.13. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3,$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$.
1. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (1,1,1).
2. Vérifier qu'au voisinage du point (1,1,1), la surface $\mathcal{S}$ est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x, y)$ où ϕ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de (1,1).
3. Écrire le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au point (1,1).
4. Donner la matrice Hessienne de ϕ au point (1,1).
5. Quelle est la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent au point (1,1).

Exercice 4.14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation $(x-a)(b-x)+\varepsilon x^3 = 0$ admet trois solutions distinctes (qu'on note $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ avec $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$). Donner un développement asymptotiques de x_1, x_2 et x_3 jusqu'à l'ordre $0(\varepsilon^2)$.

Exercice 4.15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ est $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0, alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continuement de A.