TD n° 1 :
Fonctions Différentiables

Exercice 1.0. Montrer que l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}\right.$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.1. Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$
$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 1.2. Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles des fonctions définies par

$$f_1(x,y) = e^x\cos(y), \quad f_2(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}, \quad f_3(x,y) = x^y.$$

Exercice 1.3. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs jacobiennes :

$$f_1 : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x^2-z^2}{2}, \sin(x)\sin(y)\right), \quad f_2 : (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2}+y^2, \ln\left(1+x^2\right)\right).$$

Exercice 1.4. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Après en avoir vérifié l'existence, exprimer en fonction de f' les dérivées partielles des fonctions

$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(z\sin(x)) \end{array}\right.$$

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_1(x) = f(x,-x), \quad g_2(x,y) = f(y,x), \quad g_3(x) = f(x, f(x,x)), \quad g_4(x,y) = f(y, f(x,x)).$$

Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, et calculer leurs dérivées (partielles) en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 1.6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |f(x)| \leqslant \|x\|_2^2.$$

1. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Interpréter ce résultat géométriquement.
3. Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

Exercice 1.7. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas différentiable en (0,0) et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est une réunion de demi-droites de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.8 (Existence des dérivées partielles n'implique pas continuité)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les deux dérivées partielles de f sont définies en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ mais pas en (0,0).

Exercice 1.9 (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas continuité)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en (0,0) une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 1.10. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

Exercice 1.11. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

Exercice 1.12. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

Exercice 1.13. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.14 (Coordonnées polaires)**.** On note $D = \mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ on note $\psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
1. Montrer que ψ réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ et $g = f \circ \psi$.
  a. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$.
  b. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
  c. Sans chercher à expliciter ψ^{-1}, exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 1.15. Pour $(x,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $\psi(x,\theta) = (x, x\tan(\theta))$.
1. Montrer que ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g = f \circ \psi$.
  a. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
  b. Calculer $\partial_x g$ en fonction des dérivées partielles de f.
  c. Interpréter « géométriquement » la différence entre $\partial_x g$ et $\partial_x f$.

Exercice 1.16. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf(x,y).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

Exercice 1.17. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 1.18 (Équation d'Euler)**.** Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

(f est positivement homogène de degré α) si et seulement si

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 1.19 (Équation de transport en dimension 1)**.** Soit $c > 0$. Soit u_0 une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions u de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = y - ct$.