Examen final - 17 janvier 2013

Durée : 2h

Exercice 1. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \big(\cos(xy), \ln(1+x^2+y^2), 2x\big) \end{array} \right.$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle en tout point.

Exercice 2. Étudier les extrama locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 3. 1. Calculer la dérivée extérieure de la forme différentielle

$$\omega(x,y,z) = \sin(xy)\, dx \wedge dz + \arctan^2\Big(\ln\big(\sqrt{1+x^2}\big)\Big)\, dy \wedge dx$$

sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $d(d\omega)$.

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma y\, dx + x\, dy$ lorsque γ est la courbe d'équation $x^2+y^2-ay = 0$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$. Lorsque c'est le cas, préciser la dimension et déterminer le plan tangent en tout point :

1. $E_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 - y^3 = 0\big\}$,

2. $E_2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\big\}$.

Exercice 5. Soit $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une fonction de classe C^1. Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f : (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,0) telles que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}, \quad \det \operatorname{Jac} f(x,y) = j(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \neq 0.$$

1. On suppose dans un premier temps que f est solution du problème.

a. Soient $(x,y) \in \mathcal{V}$ et $u_0 = f_1(x,y)$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,u_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction ξ de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ tels que pour tous $(y,u) \in \mathcal{U}$ on a $(\xi(y,u), y) \in \mathcal{V}$ et $f_1(\xi(y,u), y) = u$.

b. Pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$, calculer

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}(y,u)$$

en fonction des dérivées de f_1.

c. On considère une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = j(x,y).$$

Pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$ on note $\alpha(y,u) = f_2(\xi(y,u), y)$ et $\beta(y,u) = \varphi(\xi(y,u), y)$. Montrer que pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,u) = \frac{\partial \beta}{\partial u}(y,u).$$

d. En utilisant le théorème de Poincaré, montrer qu'il existe une fonction ω de classe C^2 de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$ on a

$$\varphi(\xi(y,u),y) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(y,u) \quad \text{et} \quad f_2(\xi(y,u),y) = \frac{\partial \omega}{\partial u}(y,u).$$

Vérifier qu'en outre

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial u}(y,u) \neq 0.$$

2. Inversement, on se donne une fonction $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et telle que $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial u}$ ne s'annule pas. On considère une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = j \quad \text{et} \quad \varphi(0,0) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(0,0).$$

a. Montrer qu'il existe des fonctions f_1 et f_2 définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,0) telles que pour tout $(x,y) \in \mathcal{V}$ on a

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(y, f_1(x,y)) \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = \frac{\partial \omega}{\partial u}(y, f_1(x,y))$$

b. Montrer que l'application $f = (f_1, f_2)$ est solution du problème.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients réels, et $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice identité. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que toute matrice A dans $\mathcal{V}$ admet une racine carrée (c'est-à-dire une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$).

Pour cet exercice, on pourra attribuer une partie des points aux idées, même lorsqu'elles ne sont pas parfaitement justifiées.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. [4pts] Les applications $(x,y) \mapsto xy$, $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto 2x$ sont différentiables car polynômiales, puis les applications $(x,y) \mapsto \cos(xy)$ et $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$ sont différentiables comme composées de fonctions différentiables (cette dernière est bien définie car $1+x^2+y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). Puisque toutes les fonctions coordonnées de f sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, f est bien différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On peut alors calculer les dérivées partielles de f, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la différentielle $d_{(x,y)}f$ est l'application qui à $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ associe

$$d_{(x,y)}f(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(-(hy+kx)\sin(xy), \frac{2hx+2ky}{1+x^2+y^2}, 2h\right).$$

- On ne peut pas calculer les dérivées partielles d'une fonction puis en déduire que les dérivées partielles existent !!!
- La définition d'une différentielle pose encore problème...

Exercice 2. [5pts] L'application f est polynômiale et donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = 0 &\Longleftrightarrow (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x^9 = x \\ y = x^3 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi les points critiques de f sont (0,0), (1,1) et (-1,-1). Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

On a en particulier $\det \operatorname{Hess} f(0,0) < 0$, ce qui prouve que (0,0) est un point selle de f (en particulier, ce n'est ni un minimum local, ni un maximum local). D'autre part on a $\det \operatorname{Hess} f(1,1) > 0$ et $\operatorname{Tr} \operatorname{Hess} f(1,1) > 0$, donc f admet un minimum local en (1,1). De même, f admet un minimum local en (-1,-1).

- Lorsque la question est l'étude des extréma locaux et que vous obtenez un point selle, il est de bon goût de préciser qu'un particulier la fonction n'admet pas d'extremum local en ce point.
- Pour une raison obscure, beaucoup d'entre vous ont oublié le point critique (-1,-1)...

Exercice 3. 1. [3pts] On a

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + \frac{d}{dx}\left(\arctan^2\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\right) dx \wedge dy \wedge dx \\ &= x\cos(xy)\, dy \wedge dx \wedge dz \\ &= -x\cos(xy)\, dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

puis $d(d\omega) = 0$.

2. [3pts] Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \Longleftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

γ est donc le cercle de centre $a/2$ et de rayon $a/2$. On peut remarquer que la forme $y\,dx + x\,dy$ est fermée sur $\mathbb{R}^2$, donc exacte d'après le théorème de Poincaré ($\mathbb{R}^2$ est bien un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$). Puisqu'on l'intègre sur un contour fermé, on obtient nécessairement 0. On peut également faire le calcul explicite. On paramètre γ par $t \mapsto \left(\frac{a}{2}\cos(\theta), \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_\gamma y\,dx + x\,dy &= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} \big(-(1+\sin(\theta))\sin(\theta) + \cos^2(\theta)\big)\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} \big(-\sin(\theta) - \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\big)\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} \big(-\sin(\theta) + \cos(2\theta)\big)\,d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 4. [5pts] 1. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a $x^3 - y^3 = 0$ si et seulement si $x - y = 0$. Ainsi on a $E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,z) = 0\right\}$ où on a noté $F(x,y,z) = x - y \in \mathbb{R}$. F est une fonction polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et sa matrice jacobienne $\operatorname{Jac} F(x,y,z) = (1,-1,0)$ est de rang maximal 1. Cela prouve que E_1 est une sous-variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(x,y,z) \in E_1$ le plan tangent à E_1 en (x,y,z) est

$$\ker d_{(x,y,z)}F = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u - v = 0\right\}.$$

(le plan tangent à un plan est en tout point le plan en question).

2. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on note $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, de sorte que $E_2 = F^{-1}(\{0\})$. F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a $\operatorname{Jac} F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Cette jacobienne est de rang 1 partout sauf en 0, mais 0 n'appartient pas à E_2, donc E_2 est une sous-variété de dimension 2. Son plan tangent au point (x,y,z) est

$$\left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2xu + 2yv - 2zw = 0\right\}.$$

- Attention, dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble d'équation $x = y$ est un plan et pas une droite !

Exercice 5. 3. a. **[1,5pt]** Pour $(x,y,u) \in \mathbb{R}^3$ on note $F(x,y,u) = f_1(x,y) - u$. On a $F(0,0,u_0) = 0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,u_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des voisinages $\mathcal{W}_x$, $\mathcal{W}_y$ et $\mathcal{W}_u$ de 0,0 et u_0 et une fonction ξ de classe C^1 de $\mathcal{U} = \mathcal{W}_y \times \mathcal{W}_u$ dans $\mathcal{W}_x$ tels que $\mathcal{W}_y \times \mathcal{W}_u \subset \mathcal{V}$ et pour tout $(y,u) \in \mathcal{W}_y \times \mathcal{W}_u$ on a

$$f_1(\xi(y,u), y) - u = F(\xi(y,u), y, u) = 0.$$

b. **[1,5pt]** En dérivant l'égalité précédente par rapport à y on obtient que pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,u) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\xi(y,u),y) = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,u) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}(\xi(y,u),y)}{\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)}.$$

De même, en dérivant par rapport à u on obtient pour tout $(y,u) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)\frac{\partial \xi}{\partial u}(y,u) - 1 = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial \xi}{\partial u}(y,u) = \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)}.$$

Ces écritures sont licites car $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ ne s'annule par sur $\mathcal{V}$.

c. **[1pt]** Par dérivation de fonctions composées on obtient que pour tout $(y,u)\in\mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}(y,u)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(\xi(y,u),u)\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,u)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(\xi(y,u),y)=-\frac{\partial f_2}{\partial x}(\xi(y,u),u)\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}(\xi(y,u),y)}{\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)}+\frac{\partial f_2}{\partial y}(\xi(y,u),y)$$

et

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}(y,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi(y,u),y)\frac{\partial\xi}{\partial u}(y,u)=\frac{j(\xi(y,u),y)}{\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)}.$$

Or

$$j(\xi(y,u),y)=\det\mathrm{Jac}\,f(\xi(y,u),y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(\xi(y,u),y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(\xi(y,u),y)\frac{\partial f_2}{\partial x}(\xi(y,u),y),$$

donc on a bien

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}(y,u)=\frac{\partial\beta}{\partial u}(y,u).$$

d. **[1pt]** D'après la question précédente, la 1-forme différentielle $\alpha du+\beta dv$ est fermée sur $\mathcal{U}$, que l'on a choisi convexe. D'après le théorème de Poincaré, il existe donc une fonction ω sur $\mathcal{U}$ telle que pour tout $(y,u)\in\mathcal{U}$ on a

$$\alpha(y,u)=\frac{\partial\omega}{\partial u}(y,u)\quad\text{et}\quad\beta(y,u)=\frac{\partial\omega}{\partial y}(y,u).$$

Pour tout $(y,u)\in\mathcal{U}$ on a alors

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial u}(y,u)=\frac{\partial\beta}{\partial u}(y,u)=\frac{j(\xi(y,u),y)}{\frac{\partial f_1}{\partial x}(\xi(y,u),y)}\neq 0.$$

4. e. **[1pt]** Pour $(x,y,u)\in\mathbb{R}^3$ on note $F(x,y,u)=\frac{\partial\omega}{\partial y}(y,u)-\varphi(x,y)$. On a $F(0,0,0)=0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0,0)=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial u}(0,0)\neq 0$$

donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction f_1 de classe C^1 sur un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,0) et à valeurs dans un voisinage de 0 telle que pour tout $(x,y)\in\mathcal{V}$ on a

$$F(x,y,f_1(x,y))=0.$$

Il suffit alors de définir f_2 sur $\mathcal{V}$ par la seconde égalité (quitte à réduire $\mathcal{V}$ si nécessaire).

f. **[1pt]** En dérivant les deux égalités de la question précédente on obtient :

$$j(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial u}(y,f_1(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2\omega}{\partial^2 u}(y,f_1(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y),$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2\omega}{\partial^2 u}(y,f_1(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial u}(y,f_1(x,y)).$$

On obtient bien que $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\neq 0$ et $\det\mathrm{Jac}\,f(x,y)=j(x,y)$ sur $\mathcal{V}$.

- L'une des difficultés principales de cet exercice est qu'il y avait beaucoup de variables et de notations à manipuler en même temps. On s'aperçoit que le fait d'être rigoureux dans les notations (par exemple de bien savoir en quel point on applique telle ou telle fonctions, par rapport à quelle variable on dérive) n'est pas uniquement cosmétique, mais devient indispensable dès qu'on s'attaque à des situations un peu compliquées.

Exercice 6. [3pts] On considère sur $M_n(\mathbb{R})$ (identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$) l'application $\varphi : A \mapsto A^2$. Les fonctions coordonnées de φ sont polynômiales donc de classe C^1 (les coefficients de A^2 sont des fonctions polynômiales en les coefficients de A). Ainsi φ est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\varphi(I_n + tH) = I_n + 2tH + t^2H^2$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\varphi(I_n + tH)\bigg|_{t=0} = 2H.$$

Cela prouve que la différentielle de φ en I_n est deux fois l'application identité de $M_n(\mathbb{R})$. En particulier cette différentielle est inversible. On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale à φ en I_n : il existe des voisinage $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de I_n tels que φ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. En particulier, pour toute matrice A de $\mathcal{V}$ il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $A = \varphi(B) = B^2$.