

TD n° 2 :
Intégrales généralisées

Exercice 1.

Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, étudier la convergence de l'intégrale et, lorsqu'elle est convergente, donner sa valeur :

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$; 2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$; 3) $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$;
 4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$, 5) $\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}} dt$; 6) $\int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - 3x - 7) dx$;
 7) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$; 8) $\int_0^1 \ln(x) dx$; 9) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$;
 10) $\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{(t-4)(5-t)}} dt$; 11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} dt$; 12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} dt$.

Exercice 2.

Étudier pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^\alpha dt$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction impaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Étudier la limite quand x tend vers $+\infty$ de la quantité $\int_{-x}^x f(t) dt$.
2. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) dx$.

Exercice 4.

On considère la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est définie sur $[n, n+1[$ par les propriétés suivantes :

- $f(n) = f(n + \frac{1}{2n^3}) = 0$, $f(n + \frac{1}{4n^3}) = n$,
- f est linéaire sur $[n, n + \frac{1}{4n^3}]$ et sur $[n + \frac{1}{4n^3}, n + \frac{1}{2n^3}]$,
- f est nulle sur $[n + \frac{1}{2n^3}, n+1[$.

1. Tracer le graphe de f .
2. Montrer que f n'est pas bornée.
3. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Exercice 5.

1. Montrer qu'on a :

$$\sqrt{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \sqrt{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x/2}$$

2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$ est convergente.

Exercice 6.

Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}
 1) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt; \\
 4) \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt; \quad 5) \int_0^1 \frac{\sin t}{t^3} dt; \quad 6) \int_0^1 \frac{1}{e^t - \cos t} dt; . \\
 7) \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}} dt; \quad 8) \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt; \quad 9) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 7.

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt; \quad 2) \int_0^\infty \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt; \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}; \quad 4) \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx.$$

Exercice 8.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
3. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.
4. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente.

Exercice 9.

1. Pour tout $\alpha > 0$, étudier la convergence et la convergence absolue de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$.
2. Donnez la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt, \quad \int_0^1 \sin(1/t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt.$$

Exercice 10.

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Exercice 11.

Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2 + \cos(t)} - t\right) dt$.

Exercice 12.

On note : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

1. Déterminer le domaine de définition D_Γ de Γ .
2. Montrer que pour tout $x \in D_\Gamma$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ converge, et calculer sa valeur.

Exercice 14.

Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ sont convergentes et ont même valeur.

Exercice 15.

Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge et vaut 0.

Exercice 16.

1. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, 1[$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente.
2. On prolonge f par 0 au point 1. Montrer que la fonction ainsi obtenue est en fait intégrable sur le segment $[0, 1]$ au sens usuel.¹

Exercice 17.

Soit f une fonction de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f'(x) = O(|x^{-2}|)$ $_{x \rightarrow \pm\infty}$.

1. Montrer que f admet des limites finies l_+ et l_- quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. On suppose maintenant que $|f'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $|l_+ - l_-| \leq \pi$.

Exercice 18.

Soit f une fonction uniformément continue sur \mathbb{R}_+ . Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors f tend vers 0 en $+\infty$ (on pourra par exemple utiliser le critère de Cauchy).

Exercice 19.

Soit f une fonction continue et périodique sur \mathbb{R} . Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors f est la fonction nulle.

1. On n'a pas besoin de supposer que f admet une limite en 1^- ; malgré cela on est dans une situation que l'on peut qualifier d'intégrale faussement généralisée.