Contrôle Continu 2 : mardi 30 novembre.

Durée : 1h30

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte lors de la notation.

Exercice 1.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = -\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$$

1. Déterminer l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ des points pour lesquels la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge. Pour $x \in I$ on note $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
2. a) Montrer que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I.
b) Montrer que f est continue sur I.
3. Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ sur $]a, +\infty[$.
4. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.
1. Étudier la convergence de l'intégrale impropre suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

2. On considère l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\, dt.$$

Montrer que cette intégrale est convergente et préciser sa valeur.
3. a) Donner un exemple de fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur $]0, +\infty[$ mais telle que f^2 n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
b) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction bornée et intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que f^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Correction

Exercice 1.

1. Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann), donc par comparaison la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge. Pour $x < 0$ on a

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ diverge grossièrement. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge donc simplement sur $I = [0, +\infty[$.

2. a) Pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ on a vu que

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I. Comme la série $\sum f_n$ converge normalement, on obtient que la limite f est continue sur I.

3. Pour $x > a$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|g_n(x)| = \frac{ne^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \frac{ne^{-na}}{1+n^2}.$$

Or

$$\frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{1+(n+1)^2} \times \frac{1+n^2}{ne^{-na}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-a} \in [0,1[,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série terme général $\frac{ne^{-na}}{1+n^2}$ converge. Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est normalement convergente sur $]a, +\infty[$ (et donc en particulier simplement convergente).

4. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est dérivable sur $]\frac{x}{2}, +\infty[$ et $f_n' = g_n$. Ainsi la série $\sum f_n$ est convergente sur $]\frac{x}{2}, +\infty[$ et d'après la question précédente appliquée avec $a = \frac{x}{2} > 0$ la série $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $]\frac{x}{2}, +\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que f est dérivable sur $]\frac{x}{2}, +\infty[$. En particulier f est dérivable au point x. Ceci étant valable pour n'importe quel $x > 0$, on obtient finalement que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x \geqslant 1$ on a

$$\left|\frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant e^{-x}.$$

Or on a
$$\int_1^A e^{-x}\,dx = -e^{-A} + e^{-1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} e^{-1},$$
ce qui prouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente. Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est absolument convergente et donc convergente.
D'autre part on a :
$$\frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, x_0]$ (intégrale de Riemann), c'est aussi le cas par comparaison pour la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}$. Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.
2. Pour $A \geqslant 1$ on obtient en effectuant une intégration par parties :
$$\int_1^A \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{\ln A}{A} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$
Cela prouve que l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$
est convergente et que sa valeur est 1.
3. On considère de nouveau l'application $f : x \mapsto \frac{e^{-x}\cos(x)}{\sqrt{x}}$ de la question 1. On a vu qu'elle était intégrable sur $]0, +\infty[$. On vérifie maintenant que f^2 n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. On a
$$f(x)^2 = \frac{e^{-2x}\cos^2(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$
Or l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann), donc par comparaison, l'application f^2 n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, et donc pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. On considère $M \geqslant 0$ tel que
$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant M.$$
On a alors :
$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant f(x)^2 \leqslant M f(x).$$
Or la fonction Mf est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc par comparaison pour des fonctions à valeurs positives, on obtient que f^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$.