Contrôle Continu 1 : mardi 19 octobre.

Durée : 1 h 50

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte lors de la notation.

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 (2x+1)^4 \, dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^2 (3x^2+x+3)e^x \, dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2} \, dt.$$

Exercice 2.
Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{x} \end{cases} \quad ; \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{cases}$$

Exercice 3.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

et étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \geqslant 0$ on note :

$$G(x) = \int_{-2x}^{2x} f(t) \, dt.$$

1. Montrer que G est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

On pourra utliser sans démonstration le résultat suivant, démontré en T.D. :

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et non nulle, alors on a : $\int_a^b g(t)\,dt > 0$.

Correction

Exercice 1.

La première intégrale peut être calculée directement :

$$I_1 = {}_0^1(2x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = 10.$$

Pour la deuxième intégrale, on fait une double intégration par parties, en dérivant à chaque fois la fonction polynômiale et en intégrant l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_0^2 (3x^2+x+3)e^x\,dx &= \left[(3x^2+x+3)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (6x+1)e^x\,dx \\
&= 17e^2 - 3 - [(6x+1)e^x]_0^2 + \int_0^2 6e^x \\
&= 17e^2 - 3 - (13e^2-1) + (6e^2-6) = 10e^2 - 8.
\end{aligned}$$

Pour la dernière intégrale on effectue le changement de variables $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$:

$$I_3 = \int_1^e \frac{\ln t}{1+(\ln t)^2}\frac{1}{t}dt = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 2.

La fonction f_1 est de la forme uu' avec $u(x) = \ln x$. Les primitives de f_1 sont des les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2} + c,$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Pour f_2 c'est un peu plus compliqué. Comme f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la fonction $F_2 : x \mapsto \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$. Pour calculer $F_2(x)$ on commence par effectuer une intégration par parties en dérivant $\ln(1+t^2)$ et en intégrant 1 :

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt \\
&= x\ln(1+x^2) - \int_0^x \left(2 - \frac{2}{1+t^2}\right)\,dt \\
&= x\ln(1+x^2) - [2x - 2\arctan t]_0^x \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.
\end{aligned}$$

Les primitives de f_2 sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto t^n e^t$ est continue et donc intégrable sur le segment [0,1].
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$t^{n+1}e^t \leqslant t^n e^t,$$

donc en intégrant on obtient :

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}e^t\,dt \leqslant \int_0^1 t^n e^t\,dt = I_n.$$

Cela prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$0 \leqslant t^n e^t \leqslant t^n e,$$

donc en intégrant on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n e\,dt = e\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$$

Comme

$$\frac{e}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

on en déduit (par le théorème des gendarmes) que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Autre démonstration possible : Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant une intégration par parties on voit que

$$I_n = \int_0^1 t^n e^t\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}e^t\,dt = \frac{e}{n+1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}e^t\,dt.$$

Or on a

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^{n+1}}{n+1}e^t \geqslant 0,$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}e^t\,dt \geqslant 0.$$

Cela prouve que

$$I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Exercice 4.

1. Soit $x \geqslant 0$. La fonction f est continue et donc intégrable sur le segment $[-2x, 2x]$. Ainsi $G(x)$ est bien définie. Si $x < 0$, alors f est continue et donc intégrable sur le segment $[2x, -2x]$ et

$$G(x) = -\int_{2x}^{-2x} f(t)\,dt$$

est bien définie.
2. Comme f est continue, l'application

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

est bien définie, est dérivable, et $F' = f$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$G(x) = F(2x) - F(-2x).$$

G est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = 2F'(2x) - (-2)F'(-2x) = 2f(2x) + 2f(-2x).$$

Exercice 5.
On note :

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Comme f est continue, il suffit par le théorème des valeurs intermédiaires de montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $f(c_1) \leqslant I$ et $f(c_2) \geqslant I$. On montre la première affirmation (la deuxième se montre de façon analogue). On suppose par l'absurde que pour tout $x \in [a,b]$ on a : $f(x) > I$. On a alors

$$0 < \int_a^b (f(x) - I)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)I = 0,$$

ce qui donne une contradiction.

Remarque : I est la valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$.

Autre démonstration possible : Comme f est continue sur $[a,b]$ elle admet une primitive F, qui est donc une fonction dérivable sur $[a,b]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

Réécrite en fonction de f plutôt que F, cette égalité donne exactement le résultat demandé.

Autre démonstration possible : La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est continue est atteint ses bornes. On note

$$m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[a,b]} f.$$

Pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

donc

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

puis

$$m \leqslant I \leqslant M.$$

Il existe $a_1, b_1 \in [a, b]$ tel que $f(a_1) = m$ et $f(b_1) = M$. On suppose par exemple que $a_1 \leqslant b_1$ (le cas où $b_1 \leqslant a_1$ se traite de façon analogue). La fonction f est continue sur le segment $[a_1, b_1]$ et $I \in [f(a_1), f(b_1)]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a_1, b_1] \subset [a, b]$ tel que $f(c) = I$.