Contrôle Continu 2 : lundi 30 novembre 2009.

Durée : 1h15

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx$$

2. Déterminer si l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

2. Montrer qu'il y a convergence normale.

3. Montrer que pour tout $a > 0$ la fonction f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.

4. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour une fonction g continue sur $[a, b]$ on note :

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction f.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n - f$ est continue sur $[a, b]$.

2. Montrer que : $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction

Exercice 1.

1. On peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx = \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \left[-\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. La dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x}{x} = \frac{1 - \frac{\ln x}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Un tableau de variation montre que f est bornée sur $[1, +\infty[$. On note $C = \sup_{[1,+\infty[} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. On a alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^2} \leqslant \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann) donc par comparaison pour des fonctions positives, on obtient que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$ on a $f_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(0)$ est convergente. On suppose maintenant que $x \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right| \leqslant \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2\,|x|}$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2|x|}$ converge. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on calcule : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Comme la fonction f_n est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :

$$f_n'(x) = \frac{n(1+nx^2) - 2n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{n - n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2}$$

La dérivée ne s'annule qu'au point $\frac{1}{\sqrt{n}}$, où la fonction f_n atteint son maximum (faire le tableau de variations). On a donc :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente (somme de Riemann), donc la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|f_n'(x)| &\leqslant \frac{n}{n^2(1+nx^2)^2} + \frac{n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2} \leqslant \frac{n}{n^2(na^2)^2} + \frac{n^2x^2}{n^2(nx^2)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n^3a^4} + \frac{1}{n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^3a^4} + \frac{1}{n^2a^2}\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n^3a^4} + \frac{1}{n^2a^2}\right)$ est convergente, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ (et en particulier sa somme est continue sur $[a,+\infty[$ puisque f_n' l'est pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). D'après le théorème de dérivation termes à termes on obtient que f est dérivable sur $[a,+\infty[$ de dérivée : $f' = \sum f_n'$. En particulier f' est continue et donc f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

4. Soit $x > 0$. Soit $a \in]0,x[$. On a vu que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et donc en particulier f est de classe C^1 autour de x. Comme cela est vrai autour de tout $x > 0$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.

1. Par hypothèse toutes les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$. Or la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f donc f est continue. Du coup pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f - f_n$ est continue sur $[a,b]$ comme différence de deux fonctions continues.

2. On a :

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_2^2 &= \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\,dx \leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty^2\,dx = (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty^2 \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Comme la fonction racine carrée tend vers 0 en 0 on obtient :

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$