TD 4 : Séries de Fourier

Exercice 1.

1. Donner la série de Fourier de la fonction : $f_1 : x \mapsto \sin(3x)$.
2. Donner la série de Fourier de la fonction : $f_2 : x \mapsto \cos^2(x)$.

Exercice 2.

On considère le signal créneau 2π-périodique défini par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Donner l'expression de la série de Fourier de f.
3. Déterminer la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle cette série de fonctions converge simplement. Combien vaut la somme sur cet ensemble ?
4. Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et donner leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3.

On considère le signal triangulaire 2π-périodique défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Donner l'expression de la série de Fourier de f.
3. Etudier la convergence de cette série de fonctions.
4. Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et donner leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Exercice 4.

On considère le signal de redressement simple alternance défini par :

$$f(x) = \max(0, \sin(x))$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Donner l'expression de la série de Fourier de f.

3. Etudier la convergence de cette série de fonctions.
4. Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et donner leurs sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Exercice 5.
Calculer les séries de Fourier des fonctions 2π-périodiques définies de la façon suivante :

$$f_1(x) = x - \pi \text{ sur } [0, 2\pi[, \quad f_2(x) = e^x \text{ sur } [-\pi, \pi[, \quad f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Exercice 6.
Soit $T > 0$ et f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$.
1. Montrer que g est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} f(y)\, dy$$

Exercice 7.
Déterminer l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x)e^{ix} = 0$$

Exercice 8.
1. Déterminer la série de Fourier de la fonction $f : x \mapsto |\sin(x)|$. Etudier la convergence de cette série.
2. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y = |\sin(x)| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$