Topologie-Extrema-Intégrales

TD 4 : Dérivée seconde. Applications aux extrema.

Exercice 4.1 (Quand y en a pour la dimension 1, y en a pour la dimension 2). Le but de cet exercice est de revoir les résultats connus (en principe) en dimension 1 pour mieux comprendre les résultats analogues vus en dimension 2. En dimension 1, il est facile de faire des dessins sur de nombreux exemples pour bien voir ce qu'il se passe. Profitez-en ...

1. (a) Rechercher dans un vieux cours la formule de Taylor-Young pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point 0 pour les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (noter que f est définie sur un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$). On suppose que f admet en $c \in]a, b[$ un minimum local. Montrer qu'on a nécessairement $f'(c) = 0$.
   (b) Même question si f admet un maximum local en c.
   (c) Donner un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.
   (d) Trouver une fonction h définie sur l'intervalle **non-ouvert** $[0, 1[$ telle que h est dérivable sur $[0, 1[$, admet un minimum en 0 mais $h'(0) \neq 0$ (Attention, les dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$ n'ont été définies que pour des fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc ne cherchez pas d'analogue à ce résultat en dimension 2).
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $c \in]a, b[$.
   (a) Montrer que si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f admet un minimum **local** en c.
   (b) Montrer que si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f admet un maximum **local** en c.
   (c) Montrer que si f admet un minimum en c, alors $f'(c) = 0$ et $f''(c) \geqslant 0$.
   (d) Montrer que si f admet un maximum en c, alors $f'(c) = 0$ et $f''(c) \leqslant 0$.
4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation de la tangente en a à la courbe de f et discuter selon la valeur de $f''(a)$ la position au voisinage de a de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice 4.2 (Retour sur les exemples « faciles »). Reprendre les exemples des exercices 3.7, 3.8 et 3.9 en s'inspirant maintenant des résultats du paragraphe 10 du cours.

Exercice 4.3. On considère la fonction : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2(x+1) + y^3 \end{array} \right.$

f admet-elle des extrema globaux ? Déterminer les éventuels extrema locaux.

Exercice 4.4 (Deux variables et un paramètre). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + y^3 - 3\lambda xy \end{array} \right.$$

Etudier les extrema locaux de f en fonction du paramètre λ.

Exercice 4.5 (Exercice de l'examen 2005). Cet exercice est consacré à l'étude d'une équation aux dérivées partielles en deux variables. (Les variables sont notées (u, v)).

1. Montrer que les solutions de classe C^1 de l'équation $\partial_v f(u,v) = 0$ sont les fonctions de la forme $f(u,v) = g(u)$ pour tout fonction g de classe C^1 d'une seule variable (on montrera que les solutions vérifient $f(u,v) = f(u,0)$).
2. Montrer que les solutions de classe C^2 de l'équation $\partial_u \partial_v f(u,v) = 0$ sont les fonctions de la forme $f(u,v) = g(u) + h(v)$ pour toutes fonctions g et h de classe C^2 d'une seule variable (on remarquera que pour toute solution f de l'équation, la fonction $\varphi(u,v) = \partial_v f(u,v)$ est de classe C^1 et vérifie $\partial_u \varphi(u,v) = 0$, puis on se ramènera à la situation étudiée à la question précédente en posant $\psi(u,v) = f(u,v) - h(v)$ pour une fonction h bien choisie).