Topologie-Extrema-Intégrales

TD 3 : Dérivées partielles. Localisation des extrema.

Exercice 3.1 (Remémorisation des définitions).

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial}{\partial x}e^{xy}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}e^{xy}$.
2. On considère : $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   Montrer que les dérivées partielles :

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$$

   existent et donner leurs valeurs.

Exercice 3.2 (Un petit air de déjà vu...). On considère l'application : $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Conclusion : une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans être continue en ce point (alors qu'une fonction réelle dérivable est nécessairement continue !)

Exercice 3.3 (N'est pas de classe C^1 qui veut). On considère l'application :

$$f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
4. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 3.4 (Un exemple où tout marche bien). On considère l'application :

$$f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles que l'on calculera en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.5 (Coordonnées polaires). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles par rapport à celles de f.

Exercice 3.6 (Fonctions homogènes). Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qu'elle est homogène de degré k si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

1. Donner des exemples de fonction k-homogènes pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
2. On suppose que f est une fonction de classe C^1 et k-homogène pour une certain $k \in \mathbb{N}$. En dérivant l'application $t \mapsto f(tx, ty)$, montrer que l'on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k\, f(x, y)$$

Exercice 3.7 (Des extrema...). On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^4 + y^2 - 4y \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient en tout point.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les éventuels extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.8 (...En veux-tu ?...). Mêmes questions que pour l'exercice précédent avec la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy + x + 3y \end{array} \right.$$

Exercice 3.9 (...En voilà !). Mêmes questions que pour l'exercice précédent avec la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2 \end{array} \right.$$

Exercice 3.10. On note D le disque unité ouvert et $\overline{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$, puis on considère une fonction $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur D telle que $|f(x, y)| \leqslant 1$ pour tout $(x, y) \in \overline{D}$.

1. Soit $g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \overline{D}, \quad g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$$

   (a) Montrer que g est continue sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur l'ouvert D.
   (b) Minorer g sur le cercle unité $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\right\}$.
   (c) Montrer que g admet un minimum sur $\overline{D}$ (on admet qu'une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ admet un minimum) et que ce minimum est atteint en un point de D.
2. Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que :

$$(\partial_x f(a))^2 + (\partial_y f(a))^2 \leqslant 16$$