Topologie-Extrema-Intégrales

TD 1 : Borne Supérieure. Suites réelles. Continuité.

Exercice 1.1 (Mille Bornes). Déterminer si les parties de $\mathbb{R}$ suivantes admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et/ou un minimum et les expliciter.

1. $]-\sqrt{2}, 2]$
2. $]-1, 0]\cup]1, 2]$
3. $[6, 47[\cup\{2\}\cup[100, +\infty[$
4. $\{\sin(x), x \in]0, \pi[\}$
5. $\left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in]0, \pi]\right\}$
6. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 1.2 (Mieux vaut être dernier des premiers que premier des derniers). Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leqslant b$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure, que B admet une borne inférieure, et que $\sup A \leqslant \inf B$.
2. (Question Bonus) Que peut-on dire si on suppose de plus que :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a < b$$

Exercice 1.3 (Pour jouer un peu avec ε). En revenant à la définition d'une limite, montrer que : $\frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1.4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que : $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1.5 (Calcul de limites, Acte I). Déterminer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la limite éventuelle lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a . $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

b . $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

c . $u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

d . $u_n = \dfrac{E[nx]}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.6 (Pour jouer beaucoup avec ε). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire les assertions suivantes en termes de quantificateurs :

a. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d. f est continue en π.

e. f n'est pas continue en 0.

Exercice 1.7 (Quelle est la probabilité d'avoir tout juste à cet exercice ?). Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple (Toutes les suites considérées sont réelles).

a. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
b. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.
c. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors elle converge.
d. Si $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
e. Si $u_n^2 + v_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
f. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
g. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers zéro, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 1.8 (Critère de D'Alembert). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in [0,1[$. Montrer que u_n tend vers 0.

Exercice 1.9 (Moyenne de Césaro). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

1. On suppose que u_n tend vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que S_n tend également vers l.
2. Et si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$?
3. Montrer que si $u_{n+1} - u_n$ tend vers $l \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{u_n}{n}$ tend également vers l.

Exercice 1.10 (Suites extraites). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \iff \left(u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \text{ et } u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\right)$$
2. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 1.11 (Exercice monotone). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_p, p \geqslant n\}$ (justifier). Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. (Question à un Carambar) Montrer que toute suite réelle admet une suite extraite monotone.

Exercice 1.12 (Calcul de limites, Acte II). Étudier les limites de :

a. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-247}$ quand $x \to +\infty$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ quand $x \to 4$.

c. $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ quand $x \to -\infty$.

d. $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$ quand $x \to 1$.

e. $f : x \mapsto x(\sqrt{1+x^2}-x)$ quand $x \to +\infty$.

f. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ quand $x \to 0$.

g. $f : x \mapsto xE\left[\dfrac{1}{x}\right]$ quand $x \to 0$.

Exercice 1.13 (Limites et oscillations).

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $]0,+\infty[$ n'admet pas de limite en 0.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $]0,+\infty[$ admet une limite en 0.

Exercice 1.14 (Petit Brower). Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe (*ie.* il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$).

Réponses des exercices 1.1 et 1.2

Exercice 1.1. Tout d'abord chacun des ensembles considérés est non vide.

1. $A =]-\sqrt{2}, 2]$: A est borné donc admet une borne supérieure et une borne inférieure. On a $\sup A = 2$ et $\inf A = -\sqrt{2}$. En outre $2 \in A$, donc 2 est un maximum. Par contre $-\sqrt{2} \notin A$, donc A n'admet pas de minimum.
2. $B =]-1, 0] \cup]1, 2]$: $\sup B = \max B = 2$ et $\inf B = -1$. B n'admet pas de minimum.
3. $C = [6, 47[\cup \{2\} \cup [100, +\infty[$: C n'est pas majoré, donc n'admet pas de borne supérieure (et en particulier pas de maximum). Par contre C est minoré et $\inf C = \min C = 2$.
4. $D = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\underbrace{(-1)^n}_{\geqslant -1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} > -1$$
Ainsi D est minoré et $\inf D \geqslant -1$. Comme $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$, on obtient en fait : $\inf D = -1$. Par contre $-1 \notin D$, donc D n'admet pas de minimum. Pour $n \geqslant 2$, on a :
$$\underbrace{(-1)^n}_{\leqslant (-1)^2} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2}$$
et $(-1)^1 + \dfrac{1}{1} = 0 \leqslant (-1)^2 + \dfrac{1}{2}$, donc D est majoré et : $\sup D = \max D = \dfrac{3}{2}$.
5. $E = \{\sin(x), x \in]0, \pi[\}$: Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a : $0 < \sin x \leqslant 1$. En outre $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, donc $\sup E = \max E = 1$. Comme $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\inf E = 0$. Mais $0 \notin E$, donc E n'admet pas de minimum.
6. $F = \left\{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), x \in]0, \pi]\right\}$: Pour tout $x \in]0, \pi]$, on a : $-1 \leqslant \sin \dfrac{1}{x} \leqslant 1$. En outre $\sin\left(\dfrac{1}{\frac{2}{\pi}}\right) = 1$ et $\sin\left(\dfrac{1}{\frac{2}{3\pi}}\right) = -1$, donc $\inf F = \min F = -1$ et $\sup F = \max F = 1$.

Exercice 1.2.

1. Soit $b \in B$. On a :
$$\forall a \in A, \quad a \leqslant b$$
donc b est un majorant de A. On en déduit que A est majorée et : $\sup A \leqslant b$. De même pour $a \in A$, on a :
$$\forall b \in B, \quad b \geqslant a$$
donc a est un minorant de B. On en déduit que B est minorée et : $\inf B \geqslant a$. Ainsi on a prouvé :
$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \inf B$$
Cela signifie que $\inf B$ est un majorant de A, et donc que : $\sup A \leqslant \inf B$.
2. Attention, on ne peut pas conclure que $\sup A$ est strictement inférieur à $\inf B$. Prendre par exemple $A = [-1, 0]$ et $B =]0, 1]$.