Topologie-Extrema-Intégrales

TD 3 : Dérivées partielles. Localisation des extrema.

Exercice 3.10 On note D le disque unité ouvert et $\overline{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$, puis on considère une fonction $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur D telle que $|f(x,y)| \leqslant 1$ pour tout $(x,y) \in \overline{D}$.

1. Soit $g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \overline{D}, \quad g(x,y) = f(x,y) + 2(x^2+y^2)$$

   (a) Montrer que g est continue sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur l'ouvert D.

   (b) Minorer g sur le cercle unité $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} = 1\right\}$.

   (c) Montrer que g admet un minimum sur $\overline{D}$ (on admet qu'une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ admet un minimum) et que ce minimum est atteint en un point de D.

2. Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que :

$$(\partial_x f(a))^2 + (\partial_y f(a))^2 \leqslant 16$$

1. (a) L'application $(x,y) \mapsto 2(x^2+y^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale. Elle est en particulier continue sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur D. Du coup g est continue sur $\overline{D}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\overline{D}$ et de classe C^1 sur D comme somme de fonctions de classe C^1 sur l'ouvert D.

   (b) Soit $(x,y) \in \mathcal{C}$. On a $2(x^2+y^2) = 2$, donc :

$$g(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{\geqslant -1} + 2 \geqslant 1$$

   Ainsi g est minorée par 1 sur le cercle unité $\mathcal{C}$.

   (c) $\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\right\}$ est l'image réciproque du fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ et est donc fermé. En outre Δ est bien borné, donc g admet un minimum sur $\overline{D}$ (à la rigueur vous pouvez oublier ça, c'est ce qui précède et ce qui suit qui doit être bien clair) :

$$\exists z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{D}, \forall z \in \overline{D}, \quad g(z_0) \leqslant g(z)$$

   Si $z_0 \in D$, alors g atteint bien son minimum en un point de D. Sinon $z_0 \in \mathcal{C}$ et alors :

$$g(0,0) \leqslant 1 \leqslant g(z_0)$$

et donc :

$$\forall z \in \overline{D}, \quad g(0,0) \leqslant g(z)$$

Ainsi g atteint son minimum en $(0,0) \in D$.

(si cela vous embête que je note avec une seule lettre un point du plan, vous pouvez remplacer partout z_0 par (x_0, y_0) et z par (x, y)).

2. On a montré que g atteint son minimum en un point $(x_0, y_0) \in D$. Comme g est de classe C^1 sur D, on en déduit que (x_0, y_0) est un point critique pour g, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

mais on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 4x_0$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + 4y_0$$

On en déduit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = (-4x_0)^2 + (-4y_0)^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) \leqslant 16$$

car $(x_0, y_0) \in D$ donc $(x_0^2 + y_0^2) \leqslant 1$.