Topologie - Extrema - Intégrales

C.C. du 06 novembre 2007

Exercice 1

1. L'application $(x,y) \mapsto xy$ est continue (car polynômiale) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$2+e^{xy} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 2+e^0 = 3$$

On a : $1+x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1$ et la fonction sinus est continue en 1, donc : $\sin(1+x^2) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \sin 1$

En outre le quotient $2+\sin(1+x^2)$ ne s'annule pas au voisinage de $(0,0)$, donc :

$$\frac{2+e^{xy}}{2+\sin(1+x^2)} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{3}{2+\sin(1)}$$

2. a/ Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$0 \leq |g(x,y)| = |x| \left| \frac{y^2}{x^4+y^2} \right| \leq |x|$$

car $0 \leq y^2 \leq x^4+y^2$

or $|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, donc $|g(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = g(0,0)$

(ou, avec les ε :

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)\| \leq \varepsilon$ (ie on prend $\delta = \varepsilon$), on a :

$$0 \leq |g(x,y)| \leq |x| \leq \|(x,y)\| \leq \varepsilon$$

donc $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = g(0,0)$)

Ainsi g est continue en O

En outre g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas

b/ h est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas

Si h était continue en O, alors on aurait en particulier $h\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(0,0) = 0$ car $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ (voir prop. 4.1 du cours)

Mais on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

donc h n'est pas continue en O

Exercice 2 :

On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Mais pour tout $n \geq N$, on a $2n \geq N$ et $2n+1 \geq N$

donc :

$$\forall n \geq N, \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Inversement, on suppose que : $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

et : $$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon \qquad (2)$$

On pose $N = 2\max(N_1, N_2) + 1$

Soit $n \geq N$

* si n est pair, alors $p = \frac{n}{2}$ est plus grand que N_1, donc d'après (1) :
$$|u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$$

* si n est impair, alors $p = \frac{n-1}{2}$ est plus grand que N_2, donc d'après (2) :
$$|u_n - \ell| = |u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

Dans tous les cas, si $n \geq N$ on a : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Exercice 3

Soit $\varepsilon > 0$

1. * On a : $O_\varepsilon(\{(0,0)\}) = \bigcup_{a \in \{(0,0)\}} B(a,\varepsilon) = B((0,0),\varepsilon)$

* Montrons que $O_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1)) = B((0,0), 1+\varepsilon)$

Soit $x \in O_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1))$. Il existe $a \in \overline{B}((0,0),1)$ tel que $x \in B(a,\varepsilon)$, soit $\|x - a\| < \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|x - (0,0)\| \leq \underbrace{\|x - a\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|a - (0,0)\|}_{\leq 1} < 1+\varepsilon$$

donc $x \in B((0,0), 1+\varepsilon)$

d'où $O_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1)) \subset B((0,0), 1+\varepsilon)$

Inversement, soit $x \in B((0,0), 1+\varepsilon)$

On pose $a = \dfrac{x}{1+\varepsilon}$. Alors : $\|a\| = \dfrac{\|x\|}{1+\varepsilon} \leq \dfrac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1$

et $\|x - a\| = \left(1 - \dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)\|x\| = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\| < \varepsilon$

Ainsi $a \in \overline{B}((0,0),1)$ et

$$x \in B(a,\varepsilon) \subset \bigcup_{b \in \overline{B}((0,0),1)} B(b,\varepsilon) = O_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1))$$

et donc : $B((0,0), 1+\varepsilon) \subset O_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1))$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $a \in F$, $B(a,\varepsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ - Ainsi $O_\varepsilon(F)$ est une union d'ouverts, donc un ouvert

3. Soit $a \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a \in B(a,\tfrac{1}{n}) \subset \bigcup_{b \in F} B(b,\tfrac{1}{n}) = O_{\frac{1}{n}}(F)$$

donc $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{n}}(F)$

d'où $F \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{n}}(F)$

Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ - Comme $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert, il existe $\delta_x > 0$ tel que $B(x,\delta_x) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta_x \geq \frac{1}{n}$

Pour $a \in F$, $\|x-a\| \geq \delta_x \geq \frac{1}{n}$ donc $x \notin B(a,\frac{1}{n})$

d'où $x \notin \bigcup_{a \in F} B(a,\frac{1}{n}) = O_{\frac{1}{n}}(F)$

et donc $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{n}}(F)$

et finalement $\mathbb{R}^2 \setminus F \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_{\frac{1}{n}}(F)$

soit : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{n}}(F) \subset F$

et donc $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{n}}(F)$

4. On note $\varepsilon = \inf \{\|x-y\|, x \in F_1, y \in F_2\} > 0$,

$W_1 = O_{\varepsilon/3}(F_1)$ et $W_2 = O_{\varepsilon/3}(F_2)$

On a bien W_1 et W_2 ouverts (cf qu 2),

$F_1 \subset W_1$ et $F_2 \subset W_2$ (comme qu. 3)

On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in W_1 \cap W_2$

Alors il existe $y_1 \in F_1$ tel que $\|x-y_1\| < \varepsilon/3$

et $y_2 \in F_2$ tel que $\|x-y_2\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\varepsilon \leq \|y_1-y_2\| \leq \|y_1-x\| + \|x-y_2\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon$$

ce qui est absurde, donc $W_1 \cap W_2 = \emptyset$