Topologie-Extréma-Intégrales

Contrôle Continu n°2 - 18 décembre 2007

Correction

Exercice 1.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues (car polynômiales) dont le dénominateur ne s'annule pas.

On montre maintenant que f est continue en $(0,0)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a :

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2y^2}{\|(x,y)\|^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

donc f est continue en $(0,0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{x}(f(x,0) - f(0,0)) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f est dérivable par rapport à x en $(0,0)$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

De même, f est dérivable par rapport à y en $(0,0)$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

3. On a déjà vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il ne reste donc plus qu'à montrer que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. Mais on a :

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \frac{|2xy^4|}{\|(x,y)\|^4} \leqslant \frac{2\,\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ (c'est le même calcul), donc les dérivées partielles de f sont bien continues en $(0,0)$, ce qui prouve que f est de classe C^1.

Exercice 2.

1. a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $2+x^2>0$, donc $\ln(2+x^2)$ est bien défini, et donc g est bien définie.

b) L'application $(x,y) \mapsto 2+x^2$ est de classe C^2 (car polynômiale) de $\mathbb{R}^2$ dans $]0,+\infty[$ et $t \mapsto \ln t$ est de classe C^2 de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, donc par composition de fonctions de classe C^2, $(x,y) \mapsto \ln(2+x^2)$ est de classe C^2. En outre, l'application $(x,y) \mapsto (y^3-3y+3)$ est également de classe C^2 (car polynômiale), donc g est de classe C^2 comme produit de deux fonctions de classe C^2.

2. a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{2x}{2+x^2}(y^3-3y+3), \ln(2+x^2)(3y^2-3)\right)$$

On a :

$$\nabla g(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \text{ ou } y^3-3y+3=0 \\ y^2=1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ y\in\{-1,+1\} \end{array} \right.$$

Les points critiques de g sont donc $(0,1)$ et $(0,-1)$.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & = & \frac{4-2x^2}{(2+x^2)^2}(y^3-3y+3) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) & = & \frac{2x}{2+x^2}(3y^2-3) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) & = & 6y\ln(2+x^2) \end{array}$$

En particulier on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,-1) \times \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,-1) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,-1)\right)^2 = -30\ln 2 < 0$$

donc $(0,-1)$ n'est pas un extremum local. Pour l'autre point critique on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1) \times \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,1)\right)^2 = 6\ln 2 > 0$$

donc $(0,1)$ est un extremum local, et comme :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1) = 1 + 6\ln 2 > 0$$

c'est un minimum local. Finalement g admet un seul extremum local, $(0,1)$, qui est un minimum local.

c) Comme $g(0, y) \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $(0, 1)$ n'est pas un minimum global. Comme un extremum global est nécessairement un extremum local, g n'admet aucun extremum global.

3. a) On a : $g(2, 1) = \ln 6$, donc le point $(2, 1, \ln 6)$ appartient bien à la surface d'équation $z = g(x, y)$.

b) L'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point M est :

$$z = g(2, 1) + (x - 2)\frac{\partial g}{\partial x}(2, 1) + (y - 1)\frac{\partial g}{\partial y}(2, 1)$$

soit :

$$z = \ln 6 + \frac{2}{3}(x - 2)$$

c) On a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2, 1) \times \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(2, 1) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(2, 1)\right)^2 = \left(-\frac{4}{36}\right) \times 6 \ln 6 = -\frac{2}{3} \ln 6 < 0$$

donc au voisinage du point M la surface $\mathcal{S}$ a des points au-dessus et en-dessous du plan tangent $\mathcal{T}$.

Exercice 3.

1. La suite $\left(-\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et bornée (il y en a d'autres).

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $u_n \geqslant u_0 + n\delta$. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \geqslant u_0 + 0$. On suppose maintenant le résultat acquis jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$u_{n+1} = u_n + (u_{n+1} - u_n) \geqslant (u_0 + n\delta) + \delta = u_0 + (n + 1)\delta$$

Et donc on a bien montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 + n\delta$$

Mais comme $\delta > 0$, on a $u_0 + n\delta \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De façon plus détaillée, on peut dire : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $u_0 + n\delta \geqslant A$ (on peut prendre N entier plus grand que $(A - u_0)/\delta$). Mais alors pour $n \geqslant N$, on a : $u_n \geqslant u_0 + n\delta \geqslant A$. Donc on a bien : $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Quelques remarques

1. Attention aux calculs de dérivées. Sur ce genre de sujet c'est assez inévitable. Pensez à revoir les dérivées des fonctions usuelles (exp, ln, cos, sin,...) ainsi que les formules donnant la dérivée du quotient et de la composée de deux fonctions.
2. Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y^3 - 3y + 3 = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

   il n'y a pas besoin de chercher tous les zéros de la fonction $y \mapsto y^3 - 3y + 3$. On sait que les solutions (x, y) du système vérifient $y = 1$ ou $y = -1$. Il suffit donc de vérifier si 1 ou -1 sont zéros de $y^3 - 3y + 3$, ce qui n'est pas le cas ici (donc les solutions (x, y) vérifient $x = 0$). Par contre vous pouvez tout de même regarder (mais ce n'est pas utile pour la question), que la fonction $y \mapsto y^3 - 6y + 3$ s'annule. Pour cela, utilisez le théorème des valeurs intermédiaires, qui se trouve dans la première partie du cours.
3. Attention à ne pas confondre quotient et composée quand vous justifiez la continuité d'une fonction.
4. Il est plus facile de trouver les zéros d'une fonction quand elle est donnée sous forme factorisée que sous forme développée. Par exemple, quand vous trouvez :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(y^3 - 3y + 3)}{2 + x^2}$$

   il vaut mieux ne pas développer le numérateur.
5. Quand vous voyez un δ dans l'énoncé (comme dans l'exercice 3), il ne faut pas s'imaginer que cela à nécessairement un rapport avec le δ de la définition de la continuité d'une fonction. D'ailleurs dans cet exercice il s'agissait de suites et pas de fonctions...
6. Puisqu'on en parle, ne confondez pas suite et fonction, c'est du plus mauvais effet.
7. Certains d'entre vous, voyant qu'ils n'arrivaient pas à faire les premiers calculs pour l'exercice 2 et qu'ils se retrouvaient donc bloqués pour les extréma, ont donné la méthode pour la suite. Je pense que c'est une bonne idée. Je ne sais pas si tous les correcteurs donnent une partie des points dans ces cas là, mais ça vaut le coup d'essayer...